Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 13

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $X := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ und α eine 1-Form mit

$$\alpha(x,y) := \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}, \quad x,y \in X.$$

Überprüfen Sie, dass α geschlossen ist. Finden Sie eine geschlossene Kurve Γ und eine zugehörige Parametrisierung $\gamma : I \mapsto X$ mit der Eigenschaft, dass $\int_\Gamma \alpha \neq 0$.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Man bestimme $\varphi^*\omega$ für $\omega := xdy - ydx - (x+z)dz$ und

$$\varphi : X := (0, 2\pi) \times (0, \pi) \mapsto \mathbb{R}^3, \quad (\theta_1, \theta_2) \mapsto (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2), \sin(\theta_1)\sin(\theta_2), \cos(\theta_2)).$$

(Die Rücktransformation $\varphi^*\omega$ ist definiert durch: $\varphi^*\omega(p) := [T_p\varphi]^T\omega(\varphi(p))$, d.h.
$\langle \varphi^*\omega(p), v(p)\rangle = \langle [\partial\varphi(p)]^T\omega(\varphi(p)), v(p)\rangle$ für $p \in X$ und $v \in \mathrm{C}^1(X;\mathbb{R}^n)$.)

3. Aufgabe (4 Punkte):
Welche der folgenden Mengen sind offen bzw. abgeschlossen?

$$\begin{aligned}
&A := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_1 = 1\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq 2\},\\
&C := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty < 1\}, \quad D := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 < 0, \|x\|_2 > 1\},\\
&E := \{x \in \mathbb{R}^3 : (a|x) > 2\}, \quad a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe (4 Punkte):
Sei $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ und $f : H \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y)$.
Ist f gleichmässig stetig?

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen.