Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

07.05.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 4

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 14.05.2010, in den Briefkästen auf F 4.

1. Sei X ein nichttrivialer normierter Raum und P, Q lineare Abbildungen von X nach X, für die $PQ - QP = \mathrm{id}_X$ die identische Abbildung ergibt.

   Zeigen Sie, daß P und Q nicht beide stetig sein können.

   Hinweis: untersuchen Sie $P^nQ - QP^n = nP^{n-1}$.

2. Für $1 \le p < \infty$ definieren wir den Banachraum ℓ^p durch

$$\ell^p := \left\{ (x_1, x_2, \dots) : \ : x_j \in \mathbb{C}, \qquad \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} < \infty. \right\}$$

   Zeigen Sie, daß ℓ^p separabel ist.

   Zeigen Sie, daß (für $1 \le p \le q < \infty$) folgendes gilt:

   - $\ell^p \subset \ell^q$,
   - $\|x\|_q \le \|x\|_p$,
   - die Einbettungsabbildung von ℓ^p nach ℓ^q ist stetig.

   Was passiert für $0 < p < 1$?

3. Sei s der Vektorraum aller Folgen $x = (x_1, x_2, \dots)$ mit $x_j \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß die Vektoren $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (mit 1 an der Stelle j) keine Basis für s bilden.

4. Sei $X = L^2((0,1))$ und $T \colon X \to X$ der durch $(Tf)(t) := t \cdot f(t)$ definierte lineare Operator. Bestimmen Sie $\rho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ und $\sigma_r(T)$.