Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher 21.05.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 6

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 28.05.2010, in den Briefkästen auf F 4.

Eine Nullumgebungsbasis für die schwache Topologie in einem Hilbertraum X wird gegeben durch

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}_+}\left\{\left\{x\in X\colon |\langle x,x_j\rangle| < \frac{1}{n}, \quad \forall\, j=1,\dots,m\right\} : n\in\mathbb{N}_+, \quad \forall\, x_1,\dots,x_m\in X\right\}.$$

1. In $L^2((0,1))$ betrachten wir Funktionen $f_n = f_n(x) = \sin(2\pi nx)$ für $n\in\mathbb{N}_+$. Man bestimme den schwachen Grenzwert f_* der Funktionenfolge $(f_1, f_2, \dots)$. Man verifiziere den Satz von Mazur: es gibt Funktionen $(g_1, g_2, \dots)$, sodaß jedes g_j sich ergibt als konvexe Linearkombination der $(f_1, f_2, \dots)$, mit der Eigenschaft, daß die Folge $(g_1, g_2, \dots)$ in der L^2–Norm gegen f_* konvergiert.

2. Sei $X = \ell^2(\mathbb{N}_+)$ der übliche Hilbertraum mit der kanonischen ONB $(e_1, e_2, \dots)$. Wir definieren eine Menge $A := \{e_m + me_n \colon 1\le m < n\}$ in X. Man zeige:
   - das Nullelement $\vec{0}$ von X ist schwacher Häufungspunkt von A,
   - aber A enthält keine Folge, die schwach gegen $\vec{0}$ konvergiert,
   - wenn Y ein topologischer Vektorraum ist mit einer abzählbaren Nullumgebungsbasis, dann ist jeder Häufungspunkt einer Menge ein Grenzwert einer (passend gewählten) Folge von Elementen dieser Menge.

3. Sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Man zeige:
   - die Abbildung
   $$T\colon \ell^q \to (\ell^p)', \qquad (Tx)(y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$
   (wobei $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^q$ und $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^p$) ist ein isometrischer Isomorphismus,
   - dieselbe Abbildungsvorschrift stiftet einen isometrischen Isomorphismus zwischen ℓ^1 und $(c_0)'$, dem Dualraum zum Raum der Nullfolgen.

4. Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, und sei $B\colon H\times H\to\mathbb{K}$ eine Abbildung mit
   - $x\mapsto B(x,y)$ ist für jedes $y\in H$ linear,
   - $y\mapsto B(x,y)$ ist für jedes $x\in H$ konjugiert-linear,
   - für ein $C\in\mathbb{R}$ ist $|B(x,y)|\le C\,\|x\|\,\|y\|$, für alle x, $y\in H$.

   Zeigen Sie: dann gibt es genau ein $T\in\mathcal{L}(H,H)$ mit
   $$B(x,y) = \langle x, Ty\rangle, \qquad \forall x,y\in H.$$
   Dann ist $\|T\|$ die kleinste Konstante C, für die der dritte • gilt.

Die Klausur findet am 26.07. nachmittags statt.