Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

25.06.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 11

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 02.07.2010, in den Briefkästen auf F 4.

1. Wir betrachten den Operator $A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \colon D(A) \to H$ in folgenden Grundräumen H und Definitionsbereichen $D(A)$:

   (a) $H = L^2((0,1))$ und $D(A) = \{u \in W_2^2((0,1)) \colon u(0) = u(1) = 0\}$ (Dirichlet–Randbedingungen),

   (b) $H = L^2((0,1))$ und $D(A) = \{u \in W_2^2((0,1)) \colon u'(0) = u'(1) = 0\}$ (also Neumann–Randbedingungen),

   (c) $H = L^2(\mathbb{R})$ und $D(A) = W_2^2(\mathbb{R})$.

   Dann ist $D(A) \subset H$ dicht, und es ist $D(A^*) = D(A)$ (das soll an dieser Stelle nicht bewiesen werden). Weiterhin ist A jeweils selbstadjungiert.

   Bestimmen Sie jeweils Punktspektrum, stetiges Spektrum und Restspektrum von A, und die zugehörigen Eigenfunktionen (soweit vorhanden) !

   Hinweise: Im Falle von a) und b): Benutzen Sie Ihr Wissen über kompakte Einbettungen von Sobolevräumen. Suchen Sie einen passenden kompakten Operator. Benutzen Sie 10.1. Im Falle von c): warum greift der Kompaktheitstrick hier nicht ? Generell kann es nützlich sein, Teile der reellen Achse zu finden, die zur Resolventenmenge gehören *müssen*.

2. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, und seien P_1, P_2 orthogonale Projektoren auf abgeschlossene Unterräume M_1 und M_2. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (a) $M_1 \subset M_2$,

   (b) Es ist $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$,

   (c) Es ist $\|P_1x\|_H \leq \|P_2x\|_H$ für alle $x \in H$,

   (d) Es ist $P_1 \leq P_2$ im Sinne von $\langle P_1x, x\rangle \leq \langle P_2x, x\rangle$ für alle $x \in H$.

3. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum, H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $E \colon \mathcal{A} \to L(H)$ ein projektorwertiges Maß. Zeigen Sie:

   (a) $E(\emptyset) = 0_{L(H)}$,

   (b) $E(A \cap B) + E(A \cup B) = E(A) + E(B)$ für $A, B \in \mathcal{A}$,

   (c) Wenn $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$, dann ist $E(\cup_n A_n) = \mathrm{s} - \lim_{n\to\infty} E(A_n)$ (Konvergenz in starker Operatortopologie),

   (d) Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ ist $R(E(A)) \perp R(E(B))$.

Die Klausur findet am 26.07. nachmittags statt.