Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (diskrete Metrik)

Seien X eine nichtleere Menge und $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\delta(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für $x, y \in X$.

Zeigen Sie, dass δ eine Metrik definiert, und beschreiben Sie die von δ induzierte Topologie. $\Diamond$

Aufgabe 2 (Restklassenmetrik)

Sei (X, δ) ein semimetrischer Raum, d.h. es gelten

(M1) $\forall x \in X : \delta(x,x) = 0$;
(M2) $\forall x, y \in X : \delta(x,y) = \delta(y,x)$;
(M3) $\forall x, y, z \in X : \delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$.

Für $x, y \in X$ definieren wir $x \sim y :\Leftrightarrow \delta(x,y) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Wir bezeichnen mit $X/_\sim := \{\overline{x} \mid x \in X\}$ den Raum der Äquivalenzklassen $\overline{x} := \{y \in X \mid x \sim y\}$.

(b) Zeigen Sie: $\overline{\delta}(\overline{x}, \overline{y}) := \delta(x,y)$ für $x, y \in X$ definiert eine Metrik auf $X/_\sim$. $\Diamond$

Aufgabe 3 (gleichmäßig äquivalente Metriken)

Seien $X \neq \emptyset$ und δ_1, δ_2 zwei Metriken auf X. Dann definieren wir

$$\delta_1 \ll \delta_2 :\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : \delta_2(x,y) < \delta \Rightarrow \delta_1(x,y) < \epsilon.$$

Wir nennen δ_1, δ_2 *gleichmäßig äquivalent*, falls $\delta_1 \ll \delta_2$ und $\delta_2 \ll \delta_1$. Zeigen Sie:

(a) $\delta_1 \ll \delta_2 \Rightarrow \mathbb{O}(\delta_1) \subseteq \mathbb{O}(\delta_2)$. Gleichmäßig äquivalente Metriken erzeugen also die gleiche Topologie.

(b) Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch: Es gibt Metriken, die die gleiche Topologie erzeugen, aber nicht gleichmäßig äquivalent sind.

(c) Ist d_1 eine Metrik auf X, dann wird durch $d_2(x,y) := \min\{1, d_1(x,y)\}$ für $x, y \in X$eine zu d_1 gleichmäßig äquivalente Metrik auf X definiert. $\Diamond$

Aufgabe 4 (Metrisierbarkeit)

Seien X eine Menge und $\mathbb{O} := \{\emptyset, X\}$ die *chaotische Topologie* auf X.

Für welche X ist $\mathbb{O}$ *metrisierbar* (d.h. $\mathbb{O} = \{Y \subseteq X \mid \forall y \in Y : \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(y) \subseteq Y\}$)? $\Diamond$

Aufgabe 5 (Metriken und Normen)

Sei X ein reeller Vektorraum, versehen mit einer Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

d heißt *translationsinvariant*, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X : d(x+z, y+z) = d(x,y).$$

d heißt *homogen*, falls

$$\forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R} : d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, dann definiert $d(x,y) := ||x-y||$ $(x, y \in X)$ eine Metrik auf X, die *zu* $||\cdot||$ *gehörige Metrik*.

(b) Sei (X, d) ein reeller, metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

(1) d ist translationsinvatiant und homogen;

(2) Es gibt genau eine Norm $||\cdot||$ auf X, für welche d die zugehörige Metrik ist.

(c) Überprüfen Sie, ob die diskrete Metrik auf einem reellen Vektorraum einer Norm zugehörig ist. $\Diamond$

Aufgabe 6 (Dreiecksungleichung und Konvexität)

Seien X ein reeller Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung mit

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \text{und} \qquad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R} : p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Zeigen Sie, dass p genau dann eine Norm auf X ist, wenn $M := \{x \in X \mid p(x) \leq 1\}$ konvex ist. ♢

Aufgabe 7 (Umgebungssysteme I)

Seien X eine nichtleere Mengen und $\mathbb{O}$ eine Topologie auf X. Mit

$$\mathbb{U}_x := \{U \subseteq X \mid U \text{ Umgebung von } x\}$$

bezeichnen wir das *Umgebungssystem* eines Punktes $x \in X$. Zeigen Sie:

(U0) $\mathbb{U}_x \neq \emptyset$.
(U1) $\forall U \in \mathbb{U}_x : x \in U$.
(U2) $\forall U_1, U_2 \in \mathbb{U}_x : U_1 \cap U_2 \in \mathbb{U}_x$.
(U3) $\forall U \in \mathbb{U}_x,\ V \subseteq X : U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathbb{U}_x$.
(U4) $\forall U \in \mathbb{U}_x : \exists V \in \mathbb{U}_x : \forall y \in V : U \in \mathbb{U}_y$. ♢

Aufgabe 8 (Umgebungssysteme II)

Seien X eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X\}$ die *Potenzmenge* von X. Zu jedem $x \in X$ gebe es eine Menge $\mathbb{U}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit (U0)-(U3).

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{O}(\mathbb{U}) := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O : O \in \mathbb{U}_x\}$ eine Topologie auf X definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{U}(\mathbb{O}(\mathbb{U})) = \mathbb{U}$ für jede Familie $\mathbb{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit (U0)-(U4).

$\mathbb{O}(\mathbb{U})$ besitzt also nur Umgebungen, wie sie in $\mathbb{U}$ bereits vorgegeben sind. ♢

Aufgabe 9 (Normierbarkeit)

Zeigen Sie, dass sich auf jedem $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) eine Norm definieren lässt. ♢

Aufgabe 10 (Matrixnormen)

Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir für reelle $(n \times n)$-Matrizen

$$||A||_p := \sup_{||x||_p = 1} \{||Ax||_p \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

(a) Bestimmen Sie $||A||_1$ und $||A||_\infty$ und geben Sie jeweils ein $x \in \mathbb{R}^n$ an, in dem das Supremum angenommen wird.

(b) Zeigen Sie, dass $||A||_2^2$ gerade das das Maximum aller Eigenwerte von $A^T A$ ist. ♢

Aufgabe 11 (Mächtigkeit von ℓ_2)

Zeigen Sie, dass

$$\ell_2(\mathbb{N}) := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid ||x||_2 < \infty\} \qquad \text{mit} \qquad ||x||_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$$

überabzählbar viele linear unabhängige Elemente besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Formel für die Van-der-Monde-Determinante, dass

$$\{(z_n)_{n \in \mathbb{N}} := (z, z^2, z^3, \ldots) \mid z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 1\}$$

überabzählbar ist. ♢

Aufgabe 12 (Stetige Operatoren)

Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$.

Zu jedem Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ definieren wir $||p|| := \sum_{k=0}^n |a_k|$.

(1) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ ein normierter Raum ist. Ist $(\mathcal{P}, ||\cdot||)$ ein Banachraum?

(2) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ stetig sind, und ermitteln sie deren Norm.

   (i) $T(p) = \int_0^1 p(t)\ \mathrm{d}t$.
   (ii) $T(p) = p'(0)$.
   (iii) $T(p) = p'(1)$.

(3) Untersuchen Sie, ob folgende lineare Abbildungen $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ stetig sind, und ermitteln sie deren Norm.

   (i) $T(p)(t) = \int_0^t p(s)\ \mathrm{d}s$.
   (ii) $T(p) = p'$.
   (iii) $T(p)(t) = p(t+1)$. ♢

Aufgabe 13 (Norm dicht definierter Operatoren)

Seien E, F normierte Räume, $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$ (d.h. ein linearer, stetiger Operator) und E_0 ein dichter Unterraum von E.

Zeigen Sie, dass $||T|_{E_0}|| = ||T||$ gilt. ♢

Aufgabe 14 (Reflexive Räume I)

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir bezeichnen mit $\varkappa : E \to E''$ die *kanonische Einbettung*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E' : (\varkappa x)(y) := y(x)$$

von E in den Bidual E''. Wir nennen E *reflexiv*, falls $\varkappa E = E''$, d.h. falls $\varkappa$ surjektiv ist.

Zeigen Sie: Sind E, F normierte Räume und $T : E \to F$ ein Isomorphismus, dann ist E reflexiv genau dann, wenn auch F reflexiv ist. ♢

Aufgabe 15 (Polarisierungsformeln)

(1) Zeigen Sie, dass in einem $\mathbb{R}$-Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die *Polarisierungsformel*

$$\forall x, y \in H : 4\langle x, y\rangle = ||x+y||^2 - ||x-y||^2$$

gilt.

(2) Zeigen Sie, dass in einem $\mathbb{C}$-Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die *Polarisierungsformel*

$$\forall x, y \in H : 4\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{3} i^n ||x + i^n y||^2$$

gilt.

(3) Zeigen Sie: Ist $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$, der die *Parallelogrammgleichung*

$$\forall x, y \in H : ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

erfüllt, so wird durch die zweite Polarisierungsformel ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert, dessen induzierte Norm gerade $||\cdot||$ ist. ♢

Aufgabe 16 (Bestapproximation)

Seien F eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge des Hilbertraumes $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $x_0 \in H$.

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$||x_0 - x|| = d(x_0, F) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall y \in F : \mathrm{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \le 0.$$ ♢

Aufgabe 17 (Abzählbare Orthonormalbasen)

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein *separabler* Hilbertraum, d.h. H besitzt eine abzählbare, dichte Teilmenge.

Zeigen Sie, dass alle Orthonormalbasen von H abzählbar sind. ♢

Aufgabe 18 (Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe)

Seien $(E, ||\cdot||)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $x \in E$. Zeigen Sie:

(1) Für gegebene $x_1, ..., x_n \in E$ besitzt das Minimierungsproblem

$$\min_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|$$

immer eine Lösung $(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*)$.

$y_x := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* x_i$ heißt dann die *Bestapproximation* des Punktes x in $F := \mathrm{span}(x_1, ..., x_n)$.

(2) Die Menge der Bestapproximationen ist konvex.

(3) Ist E *strikt konvex*, d.h. gilt für alle $x, y \in X,\ x \neq y$ mit $||x||, ||y|| \leq 1$, dass $\frac{1}{2}||x + y|| < 1$, dann ist α^* eindeutig. ♢

Aufgabe 19 (abgeschlossene Operatoren)

Finden Sie einen linearen, abgeschlossenen Operator T zwischen normierten Räumen X, Y, der nicht stetig ist. ♢

Aufgabe 20 (Fredholm-Operator)

Gegeben sei der Kern $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$k(s,t) := \begin{cases} (1-s)t, & t \leq s \\ (1-t)s, & s \leq t \end{cases}$$

des *Fredholm-Operators* $T : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathcal{C}([0, 1])$,

$$x(s) \mapsto \int_0^1 k(s,t)x(t)\ \mathrm{d}t \qquad (s \in [0,1]).$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte λ_n von T und die zugehörigen Eigenfunktionen x_n gerade

$$\lambda_n := (n\pi)^{-2}\ (n \in \mathbb{N}), \qquad x_n(s) := \sin(n\pi s)\ (s \in [0,1])$$

sind und dass jeder geometrische Eigenraum $E_n := \mathrm{Kern}(T - \lambda_n)$ eindimensional ist. ♢

Aufgabe 21 (Rechtsshift-Operator)

Bezeichne $S : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ den Rechtsshift-Operator $(x_1, x_2, ...) \mapsto (0, x_1, x_2, ...)$.

Bestimmen Sie $||S||, S^*, SS^*, S^*S, ||S^*||, \mathrm{Kern}(S), \mathrm{Bild}(S), \mathrm{Kern}(S^*)$ und $\mathrm{Bild}(S^*)$. ♢

Aufgabe 22 (Annihilator)

Sei E ein normierter Raum. Zu $U \subseteq E'$ heißt $U_\perp := \{x \in E \mid \forall f \in U : f(x) = 0\}$ der *Annihilator* von U.

(1) Zeigen Sie: Sind E, F Banachräume und $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$, dann gilt $\overline{\mathrm{Bild}(T)} = (\mathrm{Kern}(T'))_\perp$.

(2) Zeigen Sie weiter: Ist $\mathrm{Bild}(T)$ zusätzlich abgeschlossen, so ist die Operatorgleichung $Tx = y$ genau dann lösbar, wenn für $f \in F'$ aus $T'f = 0$ auf E folgt, dass $f(y) = 0$ sein muss. ♢

Aufgabe 23 (Spektrum eines Multiplikationsoperators)

Sei $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty(\mathbb{N})$. Bestimmen Sie das Spektrum $(\sigma_p, \sigma_c, \sigma_r)$ des Operators $T : \ell_p(\mathbb{N}) \to \ell_p(\mathbb{N})$, definiert durch $Tx := (\alpha_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für $1 \leq p < \infty$ und für $p = \infty$. ♢

Aufgabe 24 (kompakte Mengen als Spektren)

Zeigen Sie, dass jede kompakte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$ Spektrum eines stetigen Operators ist. ♢

Aufgabe 25 (Reflexive Räume II)

(1) Zeigen Sie, dass Jeder abgeschlossene Unterraum eines reflexiven Raumes selbst reflexiv ist.

(2) Zeigen Sie weiter, dass ein Banachraum genau dann reflexiv ist, wenn sein Dual reflexiv ist. ♢