Aufgabe *Seien $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ eine sesquilineare Abbildung mit*

$$\exists C > 0 : \forall x, y \in \mathcal{H} : |B(x,y)| \leq C||x||||y||. \tag{$*$}$$

Dann gibt es genau einen linearen, beschränkten Operator $T \in \mathcal{L}_b(\mathcal{H})$ mit

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : B(x,y) = \langle x, Ty\rangle.$$

Weiter ist $||T||$ die kleinste Konstante C, für die $(*)$ erfüllt ist.

Beweis Sei $y \in \mathcal{H}$ beliebig, dann definiert $x \mapsto B(x,y)$ eine lineare, stetige Abbildung $B_y : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$. Nach dem Satz von Riesz existiert damit genau ein $\tilde{y} \in \mathcal{H}$ mit $B(x,y) = B_y(x) = \langle x, \tilde{y}\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Definiere $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $Ty := \tilde{y}$. Dann gelten:

(1) T ist linear: Seien $x, y, z \in \mathcal{H}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann

$$\begin{aligned}
\langle x, T(\alpha y + \beta z)\rangle &= B(x, \alpha y + \beta z) \\
&= \overline{\alpha} B(x,y) + \overline{\beta} B(x,z) \\
&= \overline{\alpha}\langle x, Ty\rangle + \overline{\beta}\langle x, Tz\rangle \\
&= \langle x, \alpha Ty + \beta Tz\rangle,
\end{aligned}$$

also $T(\alpha y + \beta z) = \alpha Ty + \beta Tz$.

(2) T ist beschränkt: Sei $x \in \mathcal{H}$ beliebig, dann

$$||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = B(Tx, x) \leq C||Tx||||x|| \qquad \Longleftrightarrow \qquad ||Tx|| \leq C||x||.$$

Dabei besteht „$\Longleftrightarrow$“, weil T bijektiv, d.h. $Tx = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Da $||T||$ die kleinste Konstante mit $\forall x \in \mathcal{H} : ||Tx|| \leq C||x||$ ist, haben wir auch $(*)$ bewiesen.

(3) T ist eindeutig: Seien $S, T \in \mathcal{L}_b(\mathcal{H})$ zwei solche Operatoren, dann gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\langle x, (T-S)y\rangle = \langle x, Ty\rangle - \langle x, Sy\rangle = B(x,y) - B(x,y) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Ty = Sy,$$

d.h. $T = S$. □