**Aufgabe** *Sei $X$ ein unendlichdimensionaler Banachraum. Dann ist der Abschluss der Einheitssphäre $\mathbb{S} := \{x \in X \mid ||x|| = 1\}$ in der schwachen Topologie $\mathcal{T}_w$ gerade die Einheitskugel $\mathbb{B} := \{x \in X \mid ||x|| \leq 1\}$ von $X$.*

**Beweis** Wir benötigen zunächst zwei Hilfsaussagen:

(1) *Seien $m \in \mathbb{N}_+$ beliebig, $f_1, ..., f_m \in X'$ und $H := \bigcap Kern(f_i)$, dann ist* $\dim(X/H) \leq m$.

Seien dazu $\overline{x_1}, ..., \overline{x_{m+1}} \in X/H$ beliebig. Wir zeigen, dass $\{\overline{x_i}\}$ linear abhängig ist: Gelte nämlich $\sum \alpha_i \overline{x_i} = \overline{0}$ (in $X/H$) für gewisse $\alpha_i \in \mathbb{K}$, dann ist $\sum \alpha_i f_j(x_i) = 0$ (in $\mathbb{K}$) für alle $j = 1, ..., m$. Das zugehörige lineares Gleichungssystem in den $m+1$ Unbestimmten $\alpha_1, ..., \alpha_{m+1}$ hat nur $m$ Zeilen, ist also nichttrivial lösbar. Somit existieren in der Tat $\alpha_1, ..., \alpha_{m+1} \in \mathbb{K}$, nicht alle 0, so dass $\sum \alpha_i \overline{x_i} = 0$, d.h. die $x_i$ sind linear abhängig.

(2) $\dim(H) = \infty$ *(insbesondere $H \neq \{0\}$).*

Andernfalls gäbe es eine endliche Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ von $H$; da $X$ unenclichdimensional, ließe sich diese zu einem linear unabhängigen System $\{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_{m+1}\} \subseteq X$ für gewisse $w_1, ..., w_{m+1} \in X$ erweitern. Wir zeigen: $\{\overline{w_1}, ..., \overline{w_{m+1}}\}$ ist linear unabhängig in $X/H$.

Sei dazu $\sum \alpha_i \overline{w_i} = \overline{0}$ (in $X/H$), dann auch $\overline{\sum \alpha_i w_i} = \overline{0}$, d.h. $\sum \alpha_i w_i \in H$. Da die $w_i$ linear unabhängig in $X$ sind, müssen dann alle $\alpha_i = 0$ sein, d.h. die $\overline{w_i}$ sind linear unabhängig in $X/H$, Widerspruch zu (1).

(3) „$\mathbb{B} \subseteq \overline{\mathbb{S}}^w$“: Sei $x \in \mathbb{B}$ beliebig und seien $\delta > 0, n \in \mathbb{N}_+$ und $f_1, ..., f_m \in X'$. Wähle ein $y \in H \backslash \{0\}$ und dazu ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $||x + \lambda y|| = 1$. Dann gilt:

$$\forall j = 1, ..., m : f_j(x - \underbrace{(x + \lambda y)}_{\in \mathbb{S}}) = -\lambda f_j(\underbrace{\ y\ }_{\in H}) = 0 < \delta,$$

da

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{\{y \in X \mid \forall j = 1, ..., m : |f_j(x - y)| < \delta\} \mid \delta > 0,\ f_1, ..., f_m \in X'\}$$

eine Umgebungsbasis von $x$ in $\mathcal{T}_w$ definiert, folgt damit $x \in \overline{\mathbb{S}}^w$.

(4) „$\overline{\mathbb{S}}^w \subseteq \mathbb{B}$“: Sei $x \in \overline{\mathbb{S}}^w$, d.h. speziell für $m = 1$ gilt:

$$\forall \delta > 0 : \forall f \in X' : \exists y \in X, ||y|| = 1 : |f(x - y)| < \delta.$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt also $|f(x)| \leq \delta + |f(y)| \leq \delta + ||f||$ für beliebiges $f \in X'$ und <u>alle</u> $\delta > 0$, also auch $\forall f \in X' : |f(x)| \leq ||f||$.

Wäre nun $||x|| > 1$, dann existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein $f_x \in X'$ mit $||f_x|| = 1$ und $|f_x(x)| = ||x||$, d.h.

$$1 < ||x|| = |f_x(x)| \leq ||f_x|| = 1,$$

ein Widerspruch. Also $||x|| \leq 1$, d.h. $x \in \mathbb{B}$. □