Aufgabe *Sei X ein Hilbertraum. X_n bezeichne den mit der Normtopologie versehenen Raum $(X, \mathcal{T}_{||\cdot||})$ und X_w den mit der schwachen Topologie versehenen Raum $(X, \mathcal{T}_w)$.*

Dann ist ein linearer Operator $T : X_w \to X_n$ stetig $\Leftrightarrow$ Bild(T) ist endlichdimensional.

Beweis „$\Rightarrow$“: Wir nehmen zunächst an, dass $T : X_w \to X_n$ stetig ist. Dann gilt:

$$\text{Für alle } \epsilon > 0 \text{ gibt es eine Nullumgebung } U \subseteq X_w \text{ mit } T(U) \subseteq B(0, \epsilon). \tag{$*$}$$

Da eine Nullumgebungsbasis in der schwachen Topologie gegeben ist durch

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{\{y \in X \mid \forall j = 1, ..., m : |f_j(y)| < \delta\} \mid \delta > 0,\ f_1, ..., f_m \in X_n'\},$$

ist $(*)$ äquivalent zu

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0, m \in \mathbb{N} : \exists f_1, ..., f_m \in X_n' : T(\{y \in X \mid \forall j = 1, ..., m : |f_j(y)| < \delta\}) \subseteq B(0, \epsilon).$$

Sei dazu $H_0 := \{y \in X \mid \forall j : f_j(y) = 0\} = \bigcap \text{Kern}(f_j)$, dann gilt speziell $T(H_0) \subseteq B(0, \epsilon)$ für alle $\epsilon > 0$, d.h. $T(H_0) = \{0\}$.

Da H_0 abgeschlossen, lässt sich X mit dem Projektionssatz zerlegen in $X = H_0 \oplus H_0^{\perp}$. $H_0^{\perp}$ ist endlichdimensional, denn $H_0^{\perp} \cong X/H_0$ (via dem kanonischen Isomorphismus $\Phi : X/H_0 \to H_0^{\perp}$, $\overline{x} \mapsto Px$, P der orthogonale Projektor $P : X \to H_0^{\perp}$) und X/H_0 ist endlichdimensional nach Aufgabe 7.1.

Damit erhalten wir $T(X) \subseteq T(H_0) \oplus T(H_0^{\perp}) = \{0\} \oplus T(H_0^{\perp})$, d.h. auch $T(X)$ ist endlichdimensional.

„$\Leftarrow$:“ Sei umgekehrt $\dim(T(X)) = m < \infty$. Wir zeigen, dass T stetig in 0 ist, d.h. dass gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \exists m \in \mathbb{N} : \exists f_1, ..., f_m \in X_n' : \forall j = 1, ..., m : |f_j(y)| < \delta \Rightarrow ||Ty|| < \epsilon.$$

Sei dazu $\{y_1, ..., y_n\}$ eine Basis von $T(X)$, dazu $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n \in X$ mit $y_i = Tx_i$ für alle i. $\{\tilde{x}_i \mid i = 1, ..., n\}$ ist dann ebenfalls linear unabhängig, mit dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram und Schmidt finden sich also $x_1, ..., x_n \in \text{span}\{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n\}$ mit $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$.

Sei $K_0 := \text{Kern}(T)$, dann $X/K_0 \cong T(X)$ (via dem kan. Isomorphismus $\Phi : X/K_0 \to T(X)$, $\overline{x} \mapsto Tx$) und wiederum $K_0^{\perp} \cong X/K_0$, d.h. $\{x_1, ..., x_n\}$ bildet eine Basis von $K_0^{\perp}$.

Seien nun $\epsilon > 0$ und $y \in X$ beliebig. Wir definieren $f_1, ..., f_n$ durch $f_i(x) := \langle x_i, x \rangle$ $(x \in X)$ und $\delta := \epsilon \cdot (\sum ||y_i||)^{-1}$. y lässt sich eindeutig zerlegen in $y = y_1 + y_2 \in K_0 \oplus K_0^{\perp}$ und y_2 besitzt eine Darstellung $y_2 = \sum \alpha_i x_i$ für $\alpha_i := \langle x_i, y \rangle$. Aus der Bedingung $|\langle x_i, y \rangle| = |f_i(y)| < \delta$ folgt dann:

$$||Ty|| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot ||y_i|| \leq \delta \cdot c = \epsilon,$$

womit alles gezeigt ist. $\square$