Tutorium Optimierung

1 Grundlagen der Optimierung

1.1 Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit

Satz 1.1 (Banachscher Fixpunktsatz)

Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\Phi : X \to X$ *kontrahierend*, d.h. es gebe ein $q < 1$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \quad < \quad q \cdot d(x, y).$$

Dann besitzt Φ genau einen *Fixpunkt* $x \in X$, d.h. für genau ein $x \in X$ gilt $\Phi(x) = x$.

Beweis. Wir zeigen, dass die folgende rekursiv definierte Folge zu beliebigem Startpunkt $x_0 \in X$ gegen den Fixpunkt von Φ konvergiert:

$$x_{n+1} \quad = \quad \Phi(x_n).$$

1. **Konvergenz:** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert eine Cauchyfolge: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\Phi(x_n), \Phi(x_{n-1})) \leq q \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq q^n \cdot d(x_1, x_0).$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$, dann liefert die Dreiecksungleichung

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=1}^{k} d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) \leq d(x_1, x_0) \cdot \sum_{j=1}^{k} q^{n+j-1} \leq d(x_1, x_0) \cdot q^n \frac{1-q^k}{1-q} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Da X vollständig ist, folgt die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in X$.

2. **Existenz:** Da Φ kontrahierend ist, ist Φ Lipschitz-stetig, es gilt also

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_{n-1}) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \Phi(x),$$

d.h. x ist ein Fixpunkt von Φ.

3. **Eindeutigkeit.** Sei $y \in X$ ein Fixpunkt von Φ, dann gilt

$$d(x, y) = d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q \cdot d(x, y);$$

da $q < 1$, folgt also $d(x, y) = 0$, d.h. $x = y$. Also ist x eindeutig bestimmt. □

Satz 1.2 (Satz über inverse Funktionen)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in U$ und $\det(\mathrm{d}f(x_0)) \neq 0$.

Dann existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von x_0, so dass gelten:

(1) $f|_V$ ist injektiv.
(2) $f(V)$ ist offen.
(3) $(f|_V)^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(V), \mathbb{R}^n)$.
(4) $(\mathrm{d}(f|_V)^{-1})(y) = (\mathrm{d}f(f^{-1}(y)))^{-1}$.

Beweis. Sei zunächst $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir definieren zu $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 + h \in U$:

$$\begin{aligned} g(h) &:= f(x_0+h) - y; \\ G(h) &:= (\mathrm{d}f(x_0))^{-1} g(h); \\ \Phi(h) &:= \mathrm{Id}(h) - G(h). \end{aligned}$$

Ist h dann ein Fixpunkt von Φ, dann ist $G(h) = 0$, d.h. auch $g(h) = 0$, d.h. $f(x_0 + h) = y$ und wir haben ein Urbild von y gefunden.

1. **Kontraktion:** Es ist
$$\mathrm{d}\Phi(0) = \mathrm{Id} - (\mathrm{d}f(x_0))^{-1}(\mathrm{d}f(x_0)) = 0;$$
da $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, ist $||\mathrm{d}\Phi_i||$ stetig bei 0 für alle $i = 1, ..., n$, d.h. es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $||\mathrm{d}\Phi_i(x)|| < \frac{1}{2n}$ ist für alle $x \in B_\epsilon(0)$. Weiter gibt es nach dem Mittelwertsatz zu $x_1, x_2 \in B_\epsilon(0)$ stets Punkte $c_1, ..., c_n \in B_\epsilon(0)$ mit
$$||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|| = \left\| \begin{pmatrix} (\mathrm{d}\Phi_1(c_1))(x_1 - x_2) \\ \vdots \\ (\mathrm{d}\Phi_n(c_n))(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \right\| \le \sum_{i=1}^n ||(\mathrm{d}\Phi_i(c_i))||\,||x_1 - x_2|| \le n\frac{1}{2n}||x_1 - x_2||.$$
Also ist Φ Lipschitz-stetig zur Konstanten $q := \frac{1}{2}$, d.h. kontrahierend auf $B_\epsilon(0)$.
2. **Selbstabbildung:** Definiere $\delta := \frac{\epsilon}{2||(\mathrm{d}f(x_0))^{-1}||}$, dann gilt für alle $h \in B_\epsilon(0)$ und alle $y \in B_\delta(f(x_0))$:
$$||\Phi(h)|| \le ||\Phi(h) - \Phi(0)|| + ||\Phi(0)|| \le \frac{||h||}{2} + ||(\mathrm{d}f(x_0))^{-1}||\,||f(x_0) - y|| \le \epsilon,$$
d.h. auch $\Phi(h)$ liegt in $B_\epsilon(0)$.

Damit erfüllt $\Phi : \overline{B_\epsilon(0)} \to \overline{B_\epsilon(0)}$ für jedes $y \in B_\delta(f(x_0))$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, es existiert also genau ein $h \in \overline{B_\epsilon(0)}$ mit $f(x_0 + h) = y$.

Setze $V := B_\epsilon(x_0) \cap f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$, dann sind V offen, $f|_V$ injektiv und $f(V) = B_\delta(f(x_0))$ offen. Insbesondere ist $f^{-1} : f(V) \to V$ definiert und stetig in $f(x_0)$. Definiere

$$H(h) := f^{-1}(f(x_0) + h) - x_0,$$

dann folgt $H(h) \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Da $f : B_\epsilon(x_0) \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist, gibt es ein im Nullpunkt stetiges $F(x_0, \cdot) : B_\epsilon(0) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (F(x_0, h))(h) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}f(x_0) = F(x_0, 0).$$

Damit ist

$$F(x_0, H(h))(H(h)) = f(x_0 + H(h)) - f(x_0) = f(x_0 + f^{-1}(f(x_0) + h) - x_0) - f(x_0) = h$$

und wir erhalten

$$f^{-1}(f(x_0) + h) = x_0 + H(h) = f^{-1}(f(x_0)) + (F(x_0, H(h)))^{-1}h,$$

d.h. f^{-1} ist differenzierbar in x_0 mit

$$\mathrm{d}f^{-1}(f(x_0)) = F(x_0, H(h))^{-1}|_{h=0} = (F(x_0, 0))^{-1} = (\mathrm{d}f(x_0))^{-1}. \qquad \square$$

Aufgabe 1.3 (Charakteristikenmethode)

Seien $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ injektiv, $\Gamma := \gamma(\mathbb{R}), f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $||\xi|| = 1$ und $(\xi, \dot\gamma(t_0))$ linear unabhängig für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. Gesucht sind eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $x_0 := \gamma(t_0)$ und eine Funktion $u \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{cases} \langle \xi, \nabla u(x) \rangle &= 0 \quad \text{für alle } x \in U \\ u(\gamma(t)) &= f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \gamma(t) \in U \end{cases} \qquad \diamondsuit$$

1.2 Der Satz über implizite Funktionen

Satz 1.4 (Satz über implizite Funktionen)
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $\Phi \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$, $(u_0, v_0) \in D$ mit $\Phi(u_0, v_0) = 0$ und

$$\mathrm{d}\Phi_{(1)}(u_0, v_0) := \begin{pmatrix} \partial_1\Phi_1(u_0, v_0) & \cdots & \partial_n\Phi_1(u_0, v_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1\Phi_n(u_0, v_0) & \cdots & \partial_n\Phi_n(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

invertierbar.
Dann gibt es eine Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^m$ von v_0 und eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^n)$, so dass gelten $\varphi(v_0) = u_0$ und $\Phi(\varphi(v), v) = 0$ für alle $v \in W$.

Beweis. Wir können den Satz über inverse Funktionen anwenden auf

$$F : D \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \qquad F(u, v) := (\Phi(u, v), v),$$

denn F ist differenzierbar und im Punkt (u_0, v_0) erfüllt das Differenzial von F

$$\det \mathrm{d}F(u_0, v_0) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{d}\Phi_{(1)} & * \\ 0 & \mathrm{Id} \end{array}\right)(u_0, v_0) = \det \mathrm{d}\Phi_{(1)}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Damit existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ von (u_0, v_0), so dass die Funktion

$$G := F^{-1}|_V : F(V) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \qquad (x, y) \mapsto (\phi(x, y), \psi(x, y))$$

definiert und stetig differenzierbar ist. Insbesondere gilt für alle $(x, y) \in V$:

$$(x, y) = F(G(x, y)) = (\Phi(\phi(x, y), \psi(x, y)), \psi(x, y)), \tag{$*$}$$

Bezeichne $P_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(x, y) \mapsto y$ die Projektion auf die zweite Komponente, dann ist $W := P_2(F(V)) \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und wegen $F(u_0, v_0) = (\Phi(u_0, v_0), v_0) = (0, v_0)$ eine Umgebung von v_0. Definiere

$$\varphi : W \to \mathbb{R}^n, \qquad v \mapsto \phi(0, v),$$

dann ist $\varphi \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^n)$ (da $\phi \in \mathcal{C}^1(F(V), \mathbb{R}^n)$), $\varphi(v_0) = \phi(F(u_0, v_0)) = u_0$ und wegen $(*)$ gilt

$$\Phi(\varphi(v), v) = \Phi(\phi(0, v), v) = 0.$$ □

Aufgabe 1.5 (Implizites Differenzieren)
Zu zeigen ist, dass die Ableitung der durch $\Phi(\varphi(v), v) = 0$ implizit definierten Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathrm{d}\varphi(v) = -\mathrm{d}\Phi_{(1)}^{-1}(\varphi(v), v) \circ \mathrm{d}\Phi_{(2)}(\varphi(v), v).$$ ◊

Aufgabe 1.6 (Implizites Auflösen beim Einheitskreis)
Der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben als Nullstellenmenge von

$$\Phi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1, \qquad (u, v) \mapsto u^2 + v^2 - 1.$$

Sei $(u_0, v_0) = (1, 0)$. Man löse die Gleichung $\Phi(u, v) = 0$ lokal bei (u_0, v_0) nach u auf.
Ferner leite man durch implizites Differenzieren eine Funktionsgleichung für φ her und löse sie. ◊

Aufgabe 1.7 (Lokale Auflösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme)
Zu zeigen ist die lokale Auflösbarkeit des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 0 \\ y^2 - z^2 &= 0 \end{cases}$$

bei $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ nach (y, z). Man berechne auch die Ableitung der Auflösungsfunktion φ'. ◊

Aufgabe 1.8 (Burgers-Gleichung)
Gegeben sei

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (t,x,u) \mapsto e^{x-tu} - u.$$

Man zeige: Die Gleichung $\Phi(t,x,u) = 0$ ist für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $(0, x_0, e^{x_0})$ nach u auflösbar und die partiellen Ableitungen der Auflösungsfunktion $u = \varphi(t,x)$ lösen die **Burgers-Gleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(t,x)^2\right) = 0.$$ ◊

1.3 Kriterien für lokale Extrema

Definition 1.9 (lokale Extremstellen)
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ und $x \in U$.

1. x heißt *lokales Maximum*, falls eine Umgebung $V \subseteq U$ von x existiert mit $f(x) \geq f(y)$ für alle $y \in V$.
2. x heißt *lokales Minimum*, falls eine Umgebung $V \subseteq U$ von x existiert mit $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in V$.
3. Gilt $f(x) = f(y)$ nur für $x = y$, so heißt x ein *isoliertes, lokales Maximum* bzw. *Minimum*.
4. Lokale Maxima und Minima werden als *lokale Extremstellen* bezeichnet.
5. x heißt eine *kritische Stelle*, falls $\mathrm{d}f(x) = 0$ gilt.
6. x heißt *Sattelpunkt*, falls x eine kritische Stelle, aber kein Extremum ist. ◊

Satz 1.10 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ und $x \in U$ ein lokales Extremum. Dann ist x ein kritischer Punkt.

Beweis. Œ sei x ein lokales Maximum. Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $||\xi|| = 1$. Dann gilt:

$$\mathrm{d}f(x)\xi = \mathrm{D}_\xi f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\xi) - f(x)}{t} \leq 0,$$

d.h. $\mathrm{d}f(x) = 0$. □

Definition 1.11 (Hesse-Matrix)
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$. Die $n \times n$-Matrix

$$\mathcal{H}_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \cdots & \partial_1\partial_n f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n\partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

heißt die *Hesse-Matrix* von f im Punkt x.

Nach dem Satz von Schwarz ist die Hesse-Matrix symmetrisch. ◊

Definition 1.12 (Definitheit)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann heißt A ...

1. ... positiv definit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle x, Ax\rangle > 0$;
2. ... positiv semidefinit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle x, Ax\rangle \geq 0$;
3. ... negativ definit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle x, Ax\rangle < 0$;
4. ... negativ semidefinit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle x, Ax\rangle \leq 0$;
5. ... indefinit, falls $x, y \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $\langle x, Ax\rangle > 0$ und $\langle y, Ay\rangle < 0$. ◊

Satz 1.13 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ und $x \in U$ mit $\mathrm{d}f(x) = 0$. Dann gelten:

1. f hat in x ein lokales, isoliertes Maximum, falls $\mathcal{H}_f(x)$ negativ definit ist.
2. f hat in x ein lokales, isoliertes Minimum, falls $\mathcal{H}_f(x)$ positiv definit ist.
3. f hat in x einen Sattelpunkt, falls $\mathcal{H}_f(x)$ indefinit ist.

Beweis. Eine Taylorentwicklung von f im Punkt x liefert:

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(x)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \partial_i \partial_j f(x)}_{\text{relevanter Term an Extremstelle}} + R(x,h) = \frac{1}{2} \langle h, \mathcal{H}_f(x) h \rangle + R(x,h),$$

wobei $R(x,h)$ für $||h|| \to 0$ schneller verschwindet als $||h||^2$. □

Korollar 1.14 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ und $x \in U$. Dann gelten:

1. Hat f ein lokales Maximum in x, so ist $\mathcal{H}_f(x)$ negativ semidefinit.
2. Hat f ein lokales Minimum in x, so ist $\mathcal{H}_f(x)$ positiv semidefinit.

Aufgabe 1.15 (Abstandsminimierung)
Seien a, b, c, d Vektoren des $\mathbb{R}^n$, wobei (b, d) linear unabhängig seien. Wir parametrisieren zwei Geraden $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ durch

$$x(s) := a + sb; \qquad y(t) := c + td \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Gesucht sind die globalen Extremstellen der Abstandsfunktion

$$(s,t) \mapsto ||x(s) - y(t)||.$$ ◊

Aufgabe 1.16 (Rosenbrock-Funktion)
Gesucht sind die lokalen Extremstellen der *Rosenbrock-Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, x_2) := 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$ ◊

1.4 Extrema unter Nebenbedingungen

Satz 1.17 (Satz über Extrema unter Nebenbedingungen)
Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $\Psi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ für ein $m < n$ und es gelte $\operatorname{rang}(\mathrm{d}\Psi)(x) = m$ für alle $x \in U$. Definiere

$$F : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \qquad F(x, \lambda) := f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Psi_j(x).$$

Besitzt f dann ein lokales Extremum in x_0 unter der Nebenbedingung $\Psi(x_0) = 0$, dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$, so dass (x_0, λ_0) ein kritischer Punkt von F ist.

Die Komponenten von λ_0 heißen dann *Lagrange-Multiplikatoren*.

Beweis. Wegen $\operatorname{rang} \nabla\Psi(x_0) = m$ gilt Œ (d.h. nach Variablenumbenennung), dass $(\frac{\partial}{\partial x_i} \Psi(x_0))_{1 \le i \le m}$ invertierbar ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann $\Psi(u, v) = 0$ in einer Umgebung von $x_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ lokal nach u aufgelöst werden, d.h. es existieren eine offene Umgebung $W \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ von v_0 und ein $\varphi \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^m)$ mit $\varphi(v_0) = u_0$ und $\Psi(\varphi(v), v) = 0$ für alle $v \in W$.

Nach Voraussetzung besitzt die Funktion

$$G : W \to \mathbb{R}, \qquad G(v) := f(\varphi(v), v)$$

ein Extremum in v_0, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial v} G(v_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u_0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} f(u_0, v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} \varphi(v_0) \\ \mathrm{Id} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(v_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Nach den Regeln für implizites Ableiten ist

$$\frac{\partial}{\partial v} \varphi(v_0) = -\left(\frac{\partial}{\partial u} \Psi(u_0, v_0) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial v} \Psi(u_0, v_0);$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) + \underbrace{\left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \left(\frac{\partial}{\partial u} \Psi(u_0, v_0) \right)^{-1} \right)}_{=:\lambda_0} \frac{\partial}{\partial v} \Psi(u_0, v_0) = 0.$$

Außerdem ist trivialerweise

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + \left(-\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \left(\frac{\partial}{\partial u} \Psi(u_0, v_0) \right)^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial u} \Psi(u_0, v_0) = 0.$$

Schließlich ist

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(x_0, \lambda_0) = \Psi(x_0) = 0.$$

Insgesamt erhalten wir $\mathrm{d}F(x_0, \lambda_0) = 0$, d.h. (x_0, λ_0) ist ein kritischer Punkt von Ψ. □

Aufgabe 1.18 (Gewinnmaximierung)

Aus den Produktionsfaktoren Arbeit (L) und Maschineneinsatz (K) wird gemäß der Produktionsfunktion

$$x = F(L, K) := L^{\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{3}}$$

eine gewisse Menge x an Output produziert. Dabei fallen Kosten

$$C(L, K) = wL + rK$$

an, wobei w den Stundenlohn und r die Miete für eine Stunde Maschineneinsatz bezeichnen. w und r sind fest vorgegeben, wohingegen L und K vom Produzenten frei gewählt werden können (natürlich gelten $L, K \geq 0$). Ziel des Produzenten ist es, zu einem vorgegeben Stückpreis p seinen Gewinn

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

zu maximieren, wobei $C(x)$ die minimalen Kosten zur Produktion der Outputmenge x bezeichnet und

$$R(x) = px$$

den Umsatz zu x. Man berechne die optimalen Faktormengen L^*, K^*. ◊

Bemerkung 1.19 (Kuhn-Tucker-Verfahren)

Das *Lagrange-Verfahren* zur Optimierung unter Nebenbedingugen der Form “$\Psi = 0$“ lässt sich dahingehend verallgemeinern, dass als Nebenbedingungen *Ungleichungen* zugelassen werden (die über $L, K \geq 0$ hinausgehen). Die Menge der zulässigen Punkte ist dann im linearen Fall ein Polyeder und potenzielle

Extrema korrespondieren mit den Ecken des Polyeders. Solche Probleme lassen sich mit dem sogenannten *Kuhn-Tucker-Verfahren* bzw. numerisch mit dem *Simplex-Algorithmus* lösen, vgl. dazu die Vorlesung `Numerik I`. $\Diamond$

Aufgabe 1.20 (Herdplatte)

Eine kreisförmige Platte

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$$

trage die Temperaturverteilung

$$T : D \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto xy + 1.$$

Wir suchen die Extremstellen von T. $\Diamond$