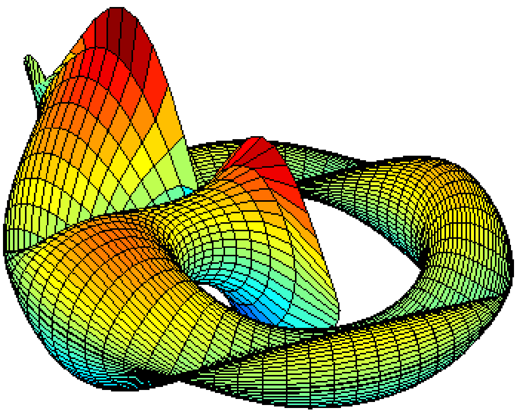
Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Aufgaben



Mehrdimensionale Differenzial- und Integralrechnung

gelesen von

Prof. Dr. Heinrich Freistühler

Martin Gubisch

Konstanz, Sommersemester 2008

Übungsaufgaben.

Aufgabe 1 (Begriffe zur Differenziation)

Seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{S}^1$. Berechnen Sie zur Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := x \sin(xy)$$

das totale Differenzial $f' = \mathrm{d}f$, die Jacobi-Matrix $\mathfrak{J}_f(x, y)$ in (x, y) sowie die Richtungsableitung $\mathrm{D}_{\vec{v}} f(x, y)$ in Richtung $\vec{v}$.

Aufgabe 2 (Differenzierbarkeit)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := \sqrt{|xy|}.$$

Für welche Richtungen $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $(h \circ \nabla) f(0, 0)$ im Punkt $(0, 0)$ und für welche nicht? Ist f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar? Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar?

Aufgabe 3 (Gradient und Höhenlinien)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in U$ und $c := f(x)$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla f(x) \perp N_f(c) := \{z \in U \mid f(z) = c\},$$

d.h. dass für jedes stetig differenzierbare $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ $(\epsilon > 0)$ mit $\varphi(0) = x$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq N_f(c)$ gilt:

$$\langle \varphi'(0), \nabla f(x) \rangle = 0.$$

Aufgabe 4 (Lösen einer partiellen Differenzialgleichung)

Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$h(t, x, y) := \frac{1}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\nu t}\right) \qquad (\nu > 0)$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung ist:

$$\partial_t u(t, x, y) = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2) u(t, x, y)$$

Hintergrund: u gibt die Temperaturverteilung einer Platte mit Wärmeleitfähigkeit ν in Abwesenheit von Wärmequellen an.

Aufgabe 5 (Taylorentwicklung)

Begründen Sie, dass zu der durch

$$f(x, y) := \sin(\exp(xy) - 1) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion genau ein Polynom der Form

$$p(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

existiert, mit dem für die Größe $\sigma_R := \sup_{x^2 + y^2 = R^2} |f(x, y) - p(x, y)|$ gilt:

$$\lim_{R \to 0} (R^{-2} \sigma_R) = 0,$$

und geben Sie dieses Polynom an.

AUFGABE 6 (Gegenbeispiele)

1. Zeigen Sie, dass die im Nullpunkt durch 0 fortgesetzte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})$$

   im Ursprung unstetig, aber in alle Richtungen differenzierbar ist.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := 2x^2 - 3xy^2 + y^4$$

   auf allen Geraden durch $(0,0)$ dort ein Minimum hat, aber f kein lokales Minimum in $(0,0)$ hat.

AUFGABE 7 (lokale Extrema)

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := (4x^2 + y^2) \exp(-x^2 - 4y^2).$$

AUFGABE 8 (geometrische Optimierung)

Seien a, b, c, d Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit $b, d \neq 0$. Wir definieren zwei Geraden

$$\begin{array}{rcl} x(s) & := & a + sb; \\ y(t) & := & c + td; \end{array}$$

wobei s, t Parameter aus $\mathbb{R}$. Gesucht sind die globalen Extremstellen der Abstandsfunktion

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (s,t) & \mapsto & \|x(s) - y(t)\|_2^2 \end{array} .$$

AUFGABE 9 (parameterabhängige Optimierung)

Gegeben sei für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2 + y^2 - 1)^2 - cx \end{array} .$$

An welchen Punkten ist $\nabla f_c = 0$? Wo hat f_c sein globales Minimum?

AUFGABE 10 (lokale Umkehrbarkeit)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : Q \to f(Q), \qquad Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\},$$

gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2 y - y^3 \end{pmatrix} \qquad ((x,y) \in Q).$$

1. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x,y) \in Q$ lokal umkehrbar ist.
2. Tatsächlich hat f eine globale Umkehrabbildung $g : f(Q) \to Q$. Wie oft ist g differenzierbar?
3. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathfrak{J}_g(-2,2)$ der Umkehrabbildung im Punkt $(-2,2)$.

Aufgabe 11 (Satz über implizite Funktionen)

1. In welchen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0 \\ y^2 - z^2 & = & 0 \end{cases}$$

   lokal auflösbar?

2. Zeigen Sie, dass das System bei $(1, 1, 1)$ lokal nach (y, z) aufgelöst werden kann.
3. Bestimmen Sie die Ableitung der Auflösungsfunktion $x \mapsto (y(x), z(x))$ durch implizites Differenzieren.

Aufgabe 12 (Restringierte Optimierung)

Eine kreisförmige Platte

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$$

trage die Temperaturverteilung

$$T : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xy + 1. \end{array}$$

Gesucht sind die Stellen höchster bzw. niedrigster Temperatur.

Aufgabe 13 (Mannigfaltigkeiten)

Welche der folgenden Mengen ist eine eindimensionale / zweidimensionale / keine differenzierbare Mannigfaltigkeit?

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos(xyz) = 0\}; \\ M_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}; \\ M_3 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4 \text{ und } x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4\}. \end{aligned}$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 14 (Berechnung von Kurvenlängen)

Berechnen Sie die Längen der folgenden Kurven:

$$\alpha(t) := \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \qquad \beta(t) := \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^2 \cos(t) \\ t^2 \sin(t) \\ t^3/3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \qquad \delta(t) := \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aufgabe 15 (Integration via Transformation)

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_1^{\min\{y^{-\frac{1}{4}}, \pi\}} x^5 \cos(x^5 y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Transformationssatz.

Aufgabe 16 (Volumen eines Schnittkörpers)

Gegeben seien die beiden Paraboloide

$$\begin{aligned} P_1 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z=0\}; \\ P_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z-8=0\}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie das Volumen der von P_1 und P_2 berandeten, offenen, beschränkten Menge B.

Aufgabe 17 (Mantelfläche eines Kegels)

Bestimmen Sie für den Kegel

$$K = K(h,R) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right)\right\} \qquad (h,R>0)$$

den Flächeninhalt des Mantels

$$M = \{(x,y,z) \in \partial K \mid z \in (0,h)\}.$$

Aufgabe 18 (Längenmaß)

Sei $\mathcal{I}$ die Menge aller beschränkten Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $m : \mathcal{I} \to [0,\infty)$ habe folgende Eigenschaften:

1. $I_1, I_2, I \in \mathcal{I},\ I_1 \cap I_2 = \emptyset,\ I_1 \cup I_2 = I \Rightarrow m(I) = m(I_1) + m(I_2)$ (Additivität)
2. $I \in \mathcal{I},\ \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow m(\xi + I) = m(I)$ (Translationsinvarianz)
3. $m([0,1]) = 1$ (Normiertheit)

Zeigen Sie, dass dann für alle $a < b$ gilt $m([a,b]) = b - a$.

Aufgabe 19 (Anwendung des Hauptsatzes der Analysis)

Sei $f \in \mathfrak{C}^1([a,b]^2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

stetig differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von F.

Aufgabe 20 (Satz über Parameterintegrale)

Zeigen Sie die Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

und berechnen Sie seinen Wert.

Hinweis: Benutzen Sie die Ansätze

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-xt}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \& \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-xt}\,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \sin(x) e^{-xt}\,\mathrm{d}x.$$
