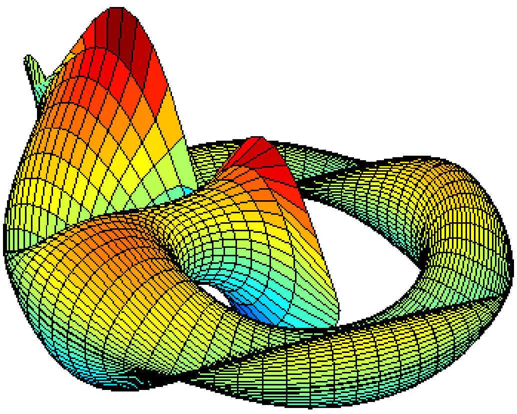
Übungen zur Vorlesung

Analysis II

Aufgaben



Mehrdimensionale Differenzial- und Integralrechnung

gelesen von

Prof. Dr. Stefan Volkwein

Martin Gubisch

Konstanz, Sommersemester 2009

Übungsaufgaben.

Aufgabe 1 (partielles Differenzieren)

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := y\sqrt{2x^2+y^2},$$

auf partielle Differenzierbarkeit und berechnen Sie wo möglich die partiellen Ableitungen.

Aufgabe 2 (partielle und totale Differenzierbarkeit)

Wir setzen die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad g(x,y) := \frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}; \qquad h(x,y) := \frac{(x-y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

im Nullpunkt durch 0 fort.

Berechnen Sie wo möglich im Punkt $(0,0)$ die Ableitungen in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{S}^1$ und überprüfen Sie die Funktionen auf totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 3 (Richtungsableitungen)

Seien $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \text{ und } x \neq 0\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} e^x - 1 & (x,y) \in M \\ 0 & (x,y) \notin M \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

1. f ist in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ partiall differenzierbar $\Leftrightarrow$ $(x,y) \notin M$.
2. Für jedes $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\nu\| = 1$ existiert die Richtungsableitung $D_\nu f(0)$.
3. Es gibt ein $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\nu\| = 1$ und $D_\nu f(0) \neq \langle \nu, \nabla f(0) \rangle$. Insbesondere ist f in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 4 (Tangentialebenen)

Berechnen Sie die Tangentialebenen der durch

$$f(x,y) := 5\exp(-x^2 - (y-2)^2) + x^2 + (y-2)^2$$

gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in den Punkten $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (-0,5;1)$ und $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (0;2)$.

Aufgabe 5 (Vektoranalysis)

Die Divergenz eines differnenzierbaren Vektorfeldes $\nu : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{div} \nu := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \nu_i}{\partial x_i}$$

und die Rotation im Fall $n = 3$ ist definiert als

$$\operatorname{rot} \nu := \left(\frac{\partial \nu_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \nu_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \nu_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \nu_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \nu_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \nu_1}{\partial x_2} \right).$$

Der Laplace-Operator Δ bildet eine zweimal differenzierbare Funktion $h : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ab auf

$$\Delta h := \operatorname{div} \operatorname{grad} h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}.$$

1. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:
$$\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0.$$
2. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie:
$$\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \cdot \Delta f.$$

Aufgabe 6 (Satz von Schwarz)

Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x, y) := xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}\backslash(0, 0)$$
mit $f(0, 0) := 0$ ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, aber nicht zweimal stetig differenzierbar.

Aufgabe 7 (Satz von Taylor)

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x, y) := \frac{x - y}{x + y},$$
im Punkt $P = (1, 1)$ bis einschließlich den Gliedern zweiter Ordnung.

Aufgabe 8 (lokale Extrema)

Finden Sie Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ folgenden Eigenschaften:

1. f besitzt in (x, y) ein lokales, isoliertes Minimum und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist positiv definit.
2. f besitzt in (x, y) einen Sattelpunkt und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist indefinit.
3. f besitzt in (x, y) ein lokales, nicht isoliertes Minimum und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.
4. f besitzt in (x, y) einen Sattelpunkt und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.
5. f besitzt in (x, y) ein lokales, isoliertes Minimum und $\mathfrak{H}_f(x, y)$ ist positiv semidefinit.

Aufgabe 9 (Kriterien für kritische Punkte)

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathfrak{C}^2(D, \mathbb{R})$ und $x \in D$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche nicht? Bei welchen der Implikationen gilt die Umkehrung?

1. ☐ Ist $f'(x) \neq 0$, dann hat f in x kein lokales Extremum. ☐
2. ☐ Ist $\mathfrak{H}_f(x)$ negativ definit, dann besitzt f in x ein lokales Maximum. ☐

Gelte ab jetzt $f'(x) = 0$.

3. ☐ Ist $\mathfrak{H}_f(x)$ positiv definit, dann hat f in x ein lokales Extremum. ☐
4. ☐ Hat f in x ein isoliertes, lokales Extremum, dann ist $\mathfrak{H}_f(x)$ positiv oder negativ definit. ☐
5. ☐ Ist $\mathfrak{H}_f(x)$ echt semidefinit, so kann f in x ein isoliertes, lokales Extremum haben.
6. ☐ Hat f in x ein isoliertes, lokales Extremum, dann kann $\mathfrak{H}_f(x)$ echt semidefinit sein.
7. ☐ Ist $\mathfrak{H}_f(x)$ indefinit, so kann f in x ein nicht isoliertes, lokales Minimum haben.
8. ☐ Hat f in x ein lokales, isoliertes Minimum, dann kann $\mathfrak{H}_f(x)$ positiv semidefinit sein.
9. ☐ Hat f in x einen Sattelpunkt, dann ist $\mathfrak{H}_f(x)$ indefinit. ☐
10. ☐ Hat f in x ein lokales Minimum, so ist $\mathfrak{H}_f(x)$ negativ semidefinit. ☐

Aufgabe 10 (Koordinatentransformation)

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$T(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} \cosh(\theta)\cos(\varphi) \\ \sinh(\theta)\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

1. Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass T lokal umkehrbar ist, und ermitteln Sie alle Punkte $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist.
2. Zeichen Sie einige φ-Koordinatenlinien für $\theta > 0$.
3. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Koordinatenlinien von φ und θ.

Aufgabe 11 (implizite Funktionen)

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x, y, z) := z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

1. Zeigen Sie, dass durch $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x, y) = (1, 1)$ implizit eine Funktion $z = z(x, y)$ mit $z(1, 1) = 1$ definiert ist.
2. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von z nach x und y im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 12 (implizite Ableitungen)

Gegeben sei $\Phi(t, x, u) = e^{x-tu} - u$ $(t, x, u \in \mathbb{R})$. Zu zeigen sind:

1. $\Phi(t, x, u) = 0$ ist in einer Umgebung von $(0, x, e^x)$ nach u auflösbar.
2. Die partiellen Ableitungen der Auflösung $U(t, x)$ aus der impliziten Gleichung $\Phi(t, x, U(t, x)) = 0$ lösen die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}U(t, x)^2 = 0. \qquad \text{(Burgers-Gleichung)}$$

Aufgabe 13 (Lagrange-Verfahren)

Bestimmen Sie Maxima und Minima der Funktion

$$f(x, y) := x(y - 1)$$

auf der Menge

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aufgabe 14 (Extrema unter Nebenbedingungen)

Die minimale Distanz zwischen dem Punkt $(0, c) \in \mathbb{R}^2$ $(c \in \mathbb{R})$ und der Parabel $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ soll berechnet werden.

1. Formulieren Sie die Fragestellung als Minimierungsproblem mit Nebenbedingung.
2. Zeichnen Sie den Graphen sowie die Niveaulinien der zu minimierenden Funktion.
3. Lösen Sie das Problem.
4. Zeigen Sie, dass die Verbindungslinie zwischen dem Punkt $(0, c)$ und dem nächsten Punkt auf der Parabel die Kurve senkrecht durchschneidet.

Aufgabe 15 (Kurvenlänge)

Bestimmen Sie die Länge der durch

$$\gamma : [0, \sinh(1)] \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(t) := \left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$$

parametrisierten Kurve.

Hinweis: Zur Berechnung des Integrals substituiere $t := \sinh(u)$ und benutze dann partielle Integration.

Aufgabe 16 (Wahrscheinlichkeitsdichte)

Berechnen Sie mittels Transformationsformel das uneigentliche Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 17 (Tetraeder-Koordinaten)

Seien $a, b, c > 0$. Betrachten Sie die Punkte $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$ und $(0, 0, c)$, welche im $\mathbb{R}^3$ eine Ebene E definieren.

1. Definieren Sie die Menge aller Punkte $V \subseteq \mathbb{R}^3$, welche zwischen E und den Koordinatenebenen liegen.
2. Berechnen Sie das Volumen von V.
3. Berechnen Sie
$$\int\limits_V x^2 y\,\mathrm{d}(x, y, z).$$
4. Führen Sie (2) und (3) unter Verwendung der Substitutionsregel durch, d.h. definieren Sie eine Kordniatentransformation $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die den Einheitswürfel des $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar auf das Tetraeder V abbildet, und benutzen Sie dann die Transformationsformel.

Aufgabe 18 (Berechnung eines Rotationskörpers)

Berechnen Sie das Volumen des Kegels

$$A := \left\{(r, \varphi, h) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \left[0, \frac{hR}{H}\right], \varphi \in [0, 2\pi], h \in [0, H]\right\}.$$

Aufgabe 19 (Schwerpunktes des Kugeloktanten)

Berechnen Sie den Schwerpunkt des Körpers

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\|^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0\}.$$

Hinweis: Der Schwerpunkt einer beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$S := \frac{1}{\mathrm{vol(A)}} \int\limits_A x\,\mathrm{d}x := \frac{1}{\int_A 1\,\mathrm{d}x} \left(\int\limits_A x_1\,\mathrm{d}x, \ldots, \int\limits_A x_n\,\mathrm{d}x\right).$$

Aufgabe 20 (Kugeloberfläche)

Berechnen Sie die Oberfläche einer 3D-Kugel mit Radius R.

Hinweis: Nutzen Sie Kugelkoordinaten und die Gramsche Formel für Oberflächenintegrale.
