Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 16.04.2013
Abgabe: 23.04.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II
1. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 1** (Newton-Verfahren)

1. Bestimmen Sie die Anzahl der (reellen) Nullstellen der Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^5 - x - \frac{1}{5}.$$
2. Berechnen Sie diese mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Führen Sie so viele Iterationsschritte durch, bis die ersten sechs Nachkommastellen mit denen der exakten Lösungen übereinstimmen.

   Hinweis: Um zu zeigen, dass Sie die gewünschte Exaktheit erreicht haben, reicht es nicht, dass sich die aktuelle und nächste Iterierte in den ersten sechs Nachkommastellen nicht unterscheiden!

☐ **Aufgabe 2** (Taylor-Entwicklung)

1. Bestimmen Sie mittels Induktion alle n-ten Ableitungen des natürlichen Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.
2. Stellen Sie die (unendliche) Taylor-Reihe $P_{\ln}$ von ln um den Entwicklungspunkt $\xi = 1$ auf.
3. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in (0, \infty)$, für die der Grenzwert $P_{\ln}(x)$ in $\mathbb{R}$ existiert.

   Hinweis: Benutzen Sie Techniken wie das Quotientenkriterium und das Leibniz-Kriterium für Reihen.
4. Zeichnen Sie die Funktion ln und das zugehörige k-te Taylor-Polynom für $k = 1, 2, 5, 10, 25$ in ein gemeinsames Schaubild. Wählen Sie $x \in [-2, 4]$ für die Polynome und $x \in (0, 4]$ für ln.

☐ **Aufgabe 3** (Banachscher Fixpunktsatz)

1. Zeigen Sie, dass für die Funktion
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{2x + 1}{2x + 2}$$
eine Konstante $c \in (0, 1)$ existiert, so dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt:
$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$
Folgt daraus die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von f?
2. Berechnen Sie die exakte Lösung $\bar{x}$ der Fixpunktgleichung $f(x) = x$.
3. Ermitteln Sie eine Approximation für diesen Fixpunkt, indem Sie für den Startwert $x_0 = 1$ sowohl mittels Newton-Verfahren als auch mittels Banachscher Fixpunktiteration die ersten 10 Näherungswerte $x_1^N, ..., x_{10}^N$ und $x_1^B, ..., x_{10}^B$ bestimmen.
4. Berechnen Sie die Fehlerschranken $\frac{c}{1-c}|x_{10} - x_9|$ und $\frac{c^{10}}{1-c}|x_{10} - x_0|$ für die Banach-Iteration sowie die tatsächlichen Fehler $|\bar{x} - x_{10}^N|$ und $|\bar{x} - x_{10}^B|$, wobei c eine Kontraktionskonstante von f bezeichnet.

Hinweis: Für die Berechnungen können Sie beliebige technische Hilfsmittel wie programmierbare Taschenrechner, Excel, Matlab etc. verwenden.