Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 23.04.2013
Abgabe: 30.04.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II
2. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 4** (Differenzierbarkeit)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

1. Für $n = 0$ ist f_n im Punkt $x = 0$ nicht stetig.
2. Für $n = 1$ ist f_n im Punkt $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.
3. Für $n = 2$ ist f_n im Punkt $x = 0$ differenzierbar, aber f_n' ist in x nicht stetig.
4. Für $n = 3$ ist f_n im Punkt $x = 0$ stetig differenzierbar.

☐ **Aufgabe 5** (Laplaceoperator in Polarkoordinaten)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ setzen wir

$$(\Delta f)(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_1, ..., x_n).$$

Die Transformation in Polarkoordinaten $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

1. Sei $n = 2$. Zeigen Sie:
$$(\Delta f) \circ \Phi = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(f \circ \Phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \Phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(f \circ \Phi).$$
2. Zeichnen Sie die Mengen $\{\Phi(r, \cdot) \mid r \in \{1, 2, 3\}\}$ und $\{\Phi(\cdot, \varphi) \mid \varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}\}$ in ein Koordinatensystem.
3. Seien $n \in \mathbb{N}$ beliebig und auch $g \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:
$$\Delta(f \cdot g) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\Delta f$$

☐ **Aufgabe 6** (Gradient und Niveauflächen)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass der Gradient $\nabla f(x_0)$ auf der Niveaufläche $N_f(c) = \{x \in \Omega \mid f(x) = c\}$ senkrecht steht, d.h. dass für alle Kurven $\phi \in \mathcal{C}^1((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R}^n)$ mit $\varepsilon > 0$, $\phi(0) = x_0$ und $\phi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq N_f(c)$ gilt
$$\langle \phi'(0), (\nabla f)^{\mathrm{T}}(x_0) \rangle = 0.$$
2. Lösen Sie das Minimierungsproblem
$$\min_{d \in \mathbb{R}^n,\ \|d\|=1} \langle d, (\nabla f)^{\mathrm{T}}(x_0) \rangle.$$
