

Ausgabe: 14.05.2013

Abgabe: 21.05.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II

5. Übungsblatt

□ **Aufgabe 13** (Taylor-Polynome)

1. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 der Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 \cos x_2 \exp x_3$$

am Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$.

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x_i| \leq 10^{-2}$, $i = 1, 2, 3$, gilt $|f(x) - T_2(x)| \leq 10^{-5}$.

□ **Aufgabe 14** (Matrixnormen)

Die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_F$ ist definiert für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zeigen Sie:

1. $\|\cdot\|_F$ ist eine Norm, d.h. für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten ...

a) ... positive Definitheit: $\|A\|_F \geq 0$ und $\|A\|_F = 0 \Rightarrow A = 0$,

b) ... Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation: $\|\alpha A\|_F = |\alpha| \|A\|_F$,

c) ... Dreiecksungleichung: $\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$.

2. $\|\cdot\|_F$ ist submultiplikativ, d.h. $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

3. $\|\cdot\|_F$ ist verträglich bzgl. der euklidischen Norm, d.h. $\|Av\| \leq \|A\|_F \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung: $\|\cdot\|_F$ lässt sich auch für $(m \times n)$ -Matrizen definieren.

□ **Aufgabe 15** (Kugelkoordinaten und lokale Umkehrbarkeit)

Betrachten Sie die Transformationsabbildung $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

1. Leiten Sie anhand der Skizze den Übergang von sphärischen zu kartesischen Koordinaten her.

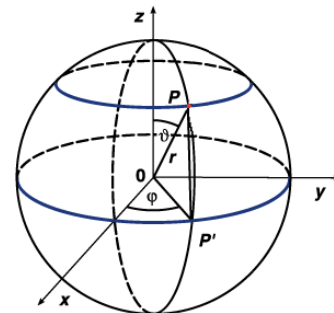
Bemerkung: Führen Sie geeignete rechtwinklige Dreiecke ein und drücken Sie mittels trigonometrischer Funktionen Kanten über Winkel aus.

2. Zeigen Sie:

a) Φ ist in jedem Punkt (x, y, z) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar.

b) Φ ist in keinem Punkt auf der z -Achse lokal umkehrbar.

c) Von $D = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi]$ nach $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid x = 0 \ \& \ y = 0\}$ ist Φ bijektiv. Leiten Sie dazu die Darstellung der Umkehrfunktion durch Auflösen nach r, ϑ, φ her.



Quelle: <http://www.amustud.de>

3. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion.