Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2013

Ausgabe: 21.05.2013
Abgabe: 28.05.2013, 10:00 Uhr, Briefkästen F4

Mathematik für Physiker II
6. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 16** (Auflösen nichtlinearer Gleichungssysteme)

1. Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x + y^2 + z &= 1 \end{aligned}$$

   lokal um die spezielle Lösung $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ nach x, y aufgelöst werden kann, d.h. dass es eine Umgebung $U_z \subseteq \mathbb{R}$ um 1 gibt, so dass für alle $z \in U_z$ Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ derart existieren, dass (x, y, z) eine Lösung des Systems ist.
2. Berechnen Sie durch implizites Differenzieren die Ableitungen der beiden Auflösungsfunktionen in z_0.
3. Geben Sie den maximalen Bereich U_z an.
4. Zeigen Sie, dass das System global nach y aufgelöst werden kann.

☐ **Aufgabe 17** (Lösen einer nichtlinearen partiellen Differenzialgleichung)

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{x-tu} = u$$

   in einer Umgebung des Punktes $(0, x, e^x)$ lokal nach u aufgelöst werden kann.
2. Zeigen Sie, dass die Auflösung u die folgende Differenzialgleichung löst:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} u^2(t, x) = 0.$$

☐ **Aufgabe 18** (Implizite Parametrisierung)

Ein Torus mit Radien $0 < r < R$ lässt sich durch die folgende Nullstellenmenge darstellen:

$$\Phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung in jedem Punkt auf dem Torus lokal nach einer der Variablen auflösbar ist.
2. Bestimmen Sie mittels impliziten Differenzierens die Ableitungen der Auflösungsfunktion $x = x(y, z)$.
3. Geben Sie für jeden Punkt (x, y, z) auf dem Torus mit $x, y, z \neq 0$ und $x^2 + y^2 \neq R^2$ die Auflösungsfunktionen nach x, y und z explizit an.
4. Leiten Sie die x-Auflösung nach y, z ab und überprüfen Sie, ob Ihr Resultat mit den zuvor bestimmten impliziten Ableitungen übereinstimmt.