Mathematik für Physiker II
Determinanten

Martin Gubisch

Konstanz, 28. Mai 2013

2.4. Rechenregeln für Determinanten

Wiederholung. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $i \in \{1, ..., n\}$. Die *Determinante* von A berechnet sich nach den Laplaceschen Zeilen- beziehungsweise Spaltenentwicklungsformel

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i}a_{ji}\det(A_{ji}),$$

wobei $A_{kl} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diejenige Matrix bezeichnet, die aus A durch Streichen der k-ten Zeile und der l-ten Spalte entsteht. $\Diamond$

Satz. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_k, A_{k1}, A_{k2} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

1. $\det(I) = 1$, d.h. det ist *normiert.*
2. $\det(A_1, ..., A_k, ..., A_k, ..., A_n) = 0$, d.h. det ist *alternierend.*
3. $\det(A_1, ..., \alpha_1 A_{k1} + \alpha_2 A_{k2}, ..., A_n) = \alpha_1 \det(A_1, ..., A_{k_1}, ..., A_n) + \alpha_2 \det(A_1, ..., A_{k2}, ..., A_n)$, d.h. det ist *multilinear.*

Die gleichen Aussagen für die Zeilen von A.

Beweis. Mittels Induktion und den Laplaceschen Entwicklungsformeln:

1. $\det((1)) = 1$ und $\det(I(n)) = (-1)^{1+1}\cdot 1 \cdot \det(I(n-1)) = 1$.
2. Es ist $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a & b \end{smallmatrix}\right) = ab - ba = 0$. Seien nun $A_i = A_k$ und $A_j = A_k$ zwei identische Spalten und $l \notin \{i, j\}$, dann
$$\det(A_1, ..., A_k, ..., A_k, ..., A_n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+l}a_{jl}\underbrace{\det(A_{jl})}_{=0} = 0,$$
3. Zur Multilinearität:
$$\begin{aligned} &\det(A_1, ..., \alpha_1 A_{k1} + \alpha_2 A_{k2}, ..., A_n) \\ =& \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}(\alpha_1 a_{jk1} + \alpha_2 a_{jk2})\det A_{jk} \\ =& \alpha_1 \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk1}\det a_{jk} + \alpha_2 \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}A_{jk2})\det A_{jk} \\ =& \alpha_1 \det(A_1, ..., A_{k1}, ..., A_n) + \alpha_2 \det(A_1, ..., A_{k2}, ..., A_n). \end{aligned}$$ $\Box$

Bemerkung. Der *Hauptsatz der Determinantentheorie* besagt, dass es genau eine Abbildung $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ gibt, die normiert, alternierend und multilinear ist. Die Eindeutigkeit ist ziemlich technisch; die Existenz wurde gerade gezeigt: det hat diese Eigenschaften.

Anwendungen des Hauptsatzes: Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$:

1. Ist $\det(B) = 0$, dann existiert $v \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ mit $Bv = 0$. Dann auch $(AB)v = A(Bv) = 0$, d.h. $\det(AB) = 0$.
2. Ist $\det(B) \neq 0$, dann rechne nach, dass die Abbildung
$$A \mapsto \frac{\det(AB)}{\det(B)}$$
normiert, alternierend und multilinear ist. Aus der Eindeutigkeit folgt dann $\det(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$. $\Diamond$

Bemerkung. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$. $\Diamond$

Lemma. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

1. $\det(A_1, ..., A_k, ..., A_l, ..., A_n) = -\det(A_1, ..., A_l, ..., A_k, ..., A_n)$.
2. $\det(A_1, ..., A_k, ..., , A_n) = \det(A_1, ..., A_k + \alpha A_l, ..., A_n)$.

Beweis. Nach dem letzten Satz gelten:

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A_1, ..., A_k + A_l, ..., A_l + A_k, ..., A_n)\\
&= \det(A_1, ..., A_k, ..., A_k, ..., A_n) + \det(A_1, ..., A_l, ..., A_k, ..., A_n)\\
&\quad + \det(A_1, ..., A_l, ..., A_k, ..., A_n) + \det(A_1, ..., A_l, ..., A_l, ..., A_n)\\
&= \det(A_1, ..., A_k, ..., A_l, ..., A_n) + \det(A_1, ..., A_l, ..., A_k, ..., A_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\det(A_1, ..., A_k + \alpha A_l, ..., A_n)\\
&= \det(A_1, ..., A_k, ..., A_n) + \alpha \det(A_1, ..., A_l, ..., A_l, ..., A_n)\\
&= \det(A_1, ..., A_k, ..., A_n).
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma. Es gelten:

1. $\det(A) = \det(A^{\mathrm{T}})$.
2. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, falls A invertierbar.
3. $\det(A) = \det(B)$, falls $A \sim B$, d.h. falls ein invertierbares P existiert mit $A = PBP^{-1}$.
4. $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$, falls A eine Dreiecksmatrix ist.
5. $\det\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ O & B \end{smallmatrix}\right) = \det(A)\det(B)$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Beweis. In den Übungen. $\square$

Bemerkung. Insbesondere können wir für einen Endomorphismus $f : V \to V$ auf einem n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V definieren: $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f))$ für eine beliebige Basis $\mathcal{V}$ des $\mathbb{R}^n$, denn ist $\mathcal{W}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^n$, dann ist $\mathrm{Mat}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f) \sim \mathrm{Mat}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}(f)$ via der Basistransformationsmatrix $\mathrm{Mat}_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(\mathrm{id})$. $\det(f)$ ist somit unabhängig von der gewählten Basis $\mathcal{V}$. $\Diamond$

Bemerkung. Die *Cramersche Regel* zum Invertieren von Matrizen lautet

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\Big((-1)^{i+j}\det(A_{ji})\Big)_{1\le i\le n}^{1\le j\le n}, \qquad \text{speziell} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ihre Anwendung eignet sich allerdings nur für kleine Matrizen; sie ist aufwendiger und weniger robust gegenüber Rundungsfehlern als beispielsweise das Gaußverfahren. $\Diamond$

Anwendung. Invertierung der Funktionalmatrix der Kugelkoordinatentransformation

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad \nabla\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

mittels Cramerscher Regel liefert sofort

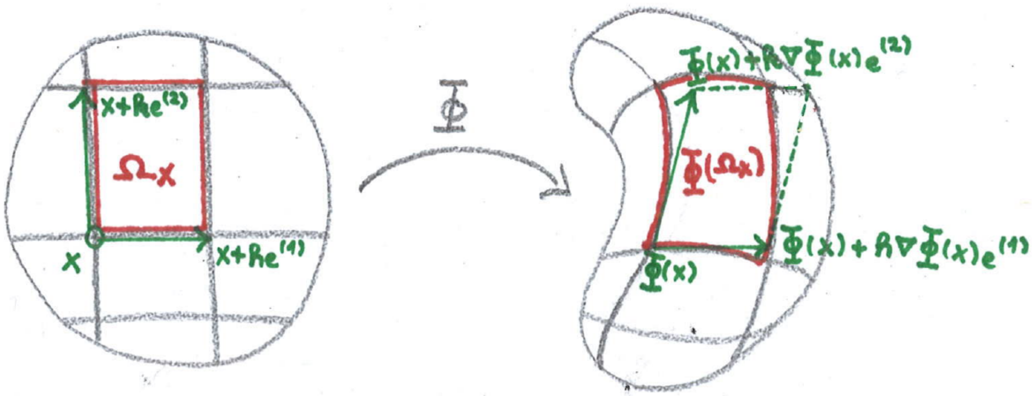
$$\nabla\Phi^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\begin{pmatrix} r^2\sin^2\vartheta\cos\varphi & r^2\sin^2\vartheta\sin\varphi & r^2\cos\vartheta\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi & r\sin^2\vartheta \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Diamond$

Vorgriff. Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes, beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, d.h. eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarem Inversen. Dann gilt

$$\mathrm{vol}(\Phi(\Omega)) = \int_\Omega |\det \nabla\Phi(x)| \mathrm{d}x$$

im folgenden Sinne:



$$\mathrm{vol}(\Phi(\Omega_x)) \approx |\det(h\nabla\Phi(x)e^{(1)}, k\nabla\Phi(x)e^{(2)})| = hk|\det\nabla\Phi(x)| = \mathrm{vol}(\Omega_x)|\det\nabla\Phi(x)|.$$

Sei $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ die endliche Menge der Gitterpunkte, dann ist für hinreichend feine Gitter

$$\mathrm{vol}(\Phi(\Omega)) \approx \sum_{x \in \tilde{\Omega}} |\det\nabla\Phi(x)| \,\mathrm{vol}(\Omega_x).$$

Details zur ein- und mehrdimensionalen Integration später. ◊

Anwendung. Berechnung des Volumens einer Kugel vom Radius R: Seien $\Omega = (0,R) \times (0,\pi) \times (-\pi,\pi)$, $\Phi_R : \Omega \to \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^3$ die Kugelkoordinatentransformation. Dann ist

$$\mathrm{vol}(\Phi(\Omega)) = \int_\Omega |\nabla\Phi(r,\vartheta,\varphi)| \,\mathrm{d}(r,\vartheta,\varphi) = \int_0^R\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = 1\Big|_{-\pi}^{\pi} (-\cos\vartheta)\Big|_0^\pi \frac{1}{3}r^3\Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad \lozenge$$

2.5. Das Kreuz- oder Vektorprodukt

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, dann ist das *Kreuz-* oder *Vektorprodukt* von a und b definiert als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Formale Merkhilfe über die Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} a \times b &= \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \vec{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \vec{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1b_2\vec{e}_3 + a_3b_1\vec{e}_2 + a_2b_3\vec{e}_1 - a_3b_2\vec{e}_1 - a_1b_3\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} a_2b_3 \\ a_3b_1 \\ a_1b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3b_2 \\ a_1b_3 \\ a_2b_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gelten:

1. $a \times b$ ist orthogonal zu a und zu b. Speziell im Fall $a \perp b$ mit $a, b \neq 0$ ist $(a, b, a \times b)$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$. Diese ist stets ein Rechtssystem, d.h. $\det(a, b, a \times b) > 0$.
2. Ist $\{a, b\}$ linear unabhängig, dann auch $\{a, b, a \times b\}$. ◊