Mathematik für Physiker II
Integration

Martin Gubisch

Konstanz, 11. Juni 2013

3.2.4. Partialbruchzerlegung

Wiederholung. Ziel ist es, das Integral eines Polynombruchs zu bestimmen, d.h.

$$\int_\alpha^\beta \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

1. Nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* besitzt jedes nichtkonstante Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ eine Nullstelle z_0 in $\mathbb{C}$. Der zugehörige *Linearfaktor* $(X - z_0)$ lässt sich dann von p abspalten, d.h. es gibt ein Polynom $q \in \mathbb{C}[X]$ mit $p(X) = q(X)(X - z_0)$. Induktiv erhalten wir: Über $\mathbb{C}$ faktorisiert jedes Polynom, d.h. hat p den Grad $n \geq 1$, dann existieren genau n Nullstellen $z_1, ..., z_n$ von p und wir erhalten $p(X) = (X - z_1) \cdots (X - z_n)$.
2. Sei $x \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p \in \mathbb{R}[X]$, dann ist $p(\overline{x}) = \overline{p(x)} = \overline{0} = 0$, d.h. auch $\overline{x}$ ist eine Nullstelle von p. Gelte $x = a + ib$, dann ist $\overline{x} = a - ib$ und es gilt
$$(X - (a + ib))(X - (a - ib)) = ((X - a) + ib)((X - a) - ib) = (X - a)^2 + b^2 \in \mathbb{R}[X].$$
Da x und $\overline{x}$ darüber hinaus die gleiche *Vielfachheit* haben, zerfällt über $\mathbb{R}$ also jedes Polynom in lineare und quadratische Faktoren, welche *irreduzibel* sind, d.h. keine reelle Nullstelle besitzen.
3. Polynome bis zum Grad vier lassen sich *in Radikale auflösen* (Ferro (1530), Tartaglia (1535), Cardano (1545), Ferrari (1545)), d.h. die Nullstellen sind als Wurzelterme berechenbar. Für Polynome ab Grad fünf ist dies dagegen nicht möglich (Ruffini (1799), Abel (1824), Galois (1843)). Allerdings lassen sich Nullstellen approximativ, etwa mit dem *Newton-Verfahren*, besitmmen.
4. Seien nun $p, q \in \mathbb{R}[X]$. Ist $\deg(p) \geq \deg(q)$, dann existieren $r, s \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(s) < \deg(q)$, so dass $\frac{p(X)}{q(X)} = r(X) + \frac{s(X)}{q(X)}$. Da Stammfunktionen von r bekannt sind, können wir bei der Partialbruchzerlegung also Œ annehmen, dass der Zählergrad echt kleiner als der Nennergrad ist.
5. Wir machen den Ansatz
$$\frac{x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{(x - x_1)\cdots(x - x_n)((x - \xi_1)^2 + \zeta_1^2)\cdots((x - \xi_\eta)^2 + \zeta_\eta^2)}$$
$$= \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n} + \frac{B_1 + C_1 x}{(x - \xi_1)^2 + \zeta_1^2} + \cdots + \frac{B_\eta + C_\eta x}{(x - \xi_\eta)^2 + \zeta_\eta^2}$$
und bestimmen A_k, B_κ mittels Koeffizientenvergleich. Die Stammfunktionen der einzelnen Summanden lassen sich dann mittels linearer Substitution aus den folgenden drei Grundintegralen bestimmen:
$$\int \frac{1}{x - 1} = \ln|x - 1|\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x^2 + 1} = \arctan(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{2x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2 + 1|. \qquad \Diamond$$

3.2.5. Numerische Methoden zur Integration

Das Integral einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lässt sich approximativ bestimmen, indem man das Integrationsintervall äquidistant in Teilintervalle $[x_j, x_{j+1}]$ zerlegt mit $x_j = a + jh$, $h = \frac{1}{n}(b - a)$, $j = 0, ..., n$, und f auf diesen Teilintervallen durch Polynome ersetzt. Generell gilt: Je höher der Grad dieser Polynome, desto genauer der Integralwert, aber desto größer der Rechenaufwand. Umgekehrt werden dann für die gleiche Exaktheit weniger Gitterpunkt n benötigt.

Summierte Trapezregel. Bei linearen Ansatzfunktionen erhalten wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=1}^n \frac{f(x_{j+1}) + f(x_j)}{2} h = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(x_n)\right). \qquad \Diamond$$

Satz. (Trapezregel) Sei $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ mit $|f''(x)| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(x_n)\right) + R,$$

wobei sich das Restglied R abschätzen lässt durch

$$|R| \leq \frac{1}{12}(b-a)Mh^2.$$

Speziell konvergiert die Summe bei Verkleinderung der Schrittweite h quadratisch gegen das Integral.

Beweis. Wir machen über $[x_j, x_{j+1}]$ den quadratischen Ansatz $\varphi_j(x) = \frac{1}{2}(x-x_j)(x_{j+1}-x)$. Dann gelten $\varphi_j \geq 0$, $\varphi_j(x_j) = \varphi_j(x_{j+1}) = 0$, $\varphi_j'(x) = \frac{h}{2} - (x-x_j)$ und $\varphi_j'' \equiv -1$. Mit partieller Integration und dem Mittelwertsatz der Integralrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j''(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\varphi_j'(x)f(x)\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{h}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_j)) + \varphi_j(x)f'(x)\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi(x)f''(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{h}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_j)) - f''(\xi_j)\int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{h}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_j)) - \frac{1}{2}f''(\xi_j)\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x-x_j)(x_{j+1}-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{h}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_j)) - \frac{1}{2}f''(\xi_j)\int_0^h x(x-h)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{h}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_j)) - \frac{1}{2}f''(\xi_j)\frac{-x^3}{3} + h\frac{x^2}{2}\Big|_0^h \\
&= \frac{h}{2}(f(x_{j+1}) + f(x_j)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_j)
\end{aligned}$$

für eine Zwischenstelle ξ_j. Summation über alle Teilintervalle liefert die Restgliedabschätzung

$$\left|\frac{h^3}{12}\sum_{j=0}^{n-1} f''(\xi_j)\right| \leq \frac{h^3}{12}\sum_{j=0}^{n-1}|M| = \frac{h^2}{12}\frac{b-a}{n}nM = \frac{h^2}{12}(b-a)M.$$ □

Keplersche Fassregel. Seien n gerade und $f \in \mathcal{C}^4([a,b],\mathbb{R})$ mit $|f^{(4)}(x)| \leq M$ für $x \in [a,b]$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2k-1}) + f(x_n)\right) + R,$$

wobei sich das Restglied abschätzen lässt gegen $|R| \leq \frac{1}{180}(b-a)Mh^4$. ◊

Newton-Cotes-Formeln. Beide Interpolationsansätze sind Spezialfälle der Newton-Cotes-Formeln, denen allen ein äquidistantes Gitter zugrunde liegt, über dem die Funktione f dann durch Polynome eines gewissen Grades approximiert wird. ◊

3.2.6. Uneigentliche Integrale

Seien $a < 0 < b$. Für die Funktion $f : [a,b]\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ist eine Stammfunktion gegeben durch $F(x) = \ln|x|$. Dies suggeriert, dass

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(b) - \ln(-a) = \ln\frac{b}{-a}, \qquad \text{speziell} \qquad \int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 1 = 0.$$

Allerdings ist der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung nicht direkt anwendbar, da f unbeschränkt und somit keine Regelfunktion ist. $\Diamond$

Definition. (uneigentliche Integrale) Seien $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ integrierbar; Entsprechendes gelte für $g : (-\infty, b]$ und für $h : (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$. Sofern die Grenzwerte existieren, definieren wir

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 h(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf jedem Intervall $[a+\epsilon, b]$ mit $0 < \epsilon < b-a$; entsprechend seien $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, b-\epsilon]$ und $h : [a,b]\backslash\{c\}$ $(c \in (a,b))$ integrierbar auf $[a, c-\epsilon]$ und auf $[c+\epsilon, b]$. Sofern die Grenzwerte existieren, setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{c-\epsilon} h(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{c+\epsilon}^{b} h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiele. Am einfachsten lassen sich uneigentliche Integralwerte bestimmen, wenn Stammfunktionen der Integranden bekannt sind:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 \qquad \text{bzw.} \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = 1,$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{e\to\infty} \int_1^e \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{e\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^e = 1.$$

Die Funktion $f : [-1,1]\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ fällt allerdings nicht in diese Kategorie, da die links- und rechtsseitigen Grenzwerte bei 0 nicht existieren: Auch die Stammfunktion $F(x) = \ln|x|$ ist hier unbeschränkt. Hier kann man die Definition mit dem so genannten *Cauchyschen Hauptwert* erweitern:

$$\mathrm{CH}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ \epsilon>0}} \ln(\epsilon) - \ln(\epsilon) = 0. \qquad \Diamond$$