Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2014

Ausgabe: Donnerstag, 24.04.2014
Abgabe: Freitag, 02.05.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis II
1. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 1** (Potenzreihen) (2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ eine Koeffizientenfolge mit zugehöriger Potenzreihe $\sum a_n x^n$. Mit $\varrho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ bezeichnen wir den Konvergenzradius der Reihe, d.h. diejenige eindeutig bestimmte Konstante $\varrho > 0$, so dass $\sum a_n x^n$ konvergiert für alle $|x| < \varrho$ und divergiert für alle $|x| > \rho$; im Falle $|x| = \varrho$ kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen.

1. (Quotientenkriterium für Potenzreihen) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist und $\lambda = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ existiert. Zeigen Sie, dass dann λ gleich dem Konvergenzradius ϱ der Potenzreihe $\sum a_n x^n$ ist.
2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\pi^{n^2}} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \exp(n \ln 3) x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}. \qquad (\star\star\star\star)$$

☐ **Aufgabe 2** (Taylor-Reihen) (6 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass für die n-te Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arctan x$ gilt

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos^n(f(x)).$$

2. Berechnen Sie die Taylorreihe $\mathcal{T}_f$ von f um $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für $|x| \leq 1$ gilt $\mathcal{T}_f(x) \to f(x)$.

☐ **Aufgabe 3** (Fourier-Reihen) (6 Punkte)

1. Berechnen Sie die Koeffizienten $a_k(f), b_k(f)$ der Fourier-Reihe

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{a_0}{2}(f) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin(kx)$$

zur 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0, \pi) \\ +1 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

2. Konvergiert $\mathcal{F}_f$ punktweise, gleichmäßig, im quadratischen Mittel gegen f?

☐ **Aufgabe 4** (p-Normen) (6 Punkte)

1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Beweisen Sie für die p-Norm $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{R}^n$ die folgende Ungleichungskette:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty.$$

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$. $(\star\star)$
3. Skizzieren Sie für $n = 2$ und $p \in \{1, 2, \infty\}$ die zu $\|\cdot\|_p$ gehörigen Einheitskugeln im $\mathbb{R}^n$.