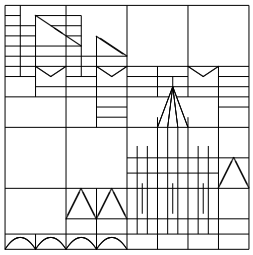
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2014



Ausgabe: Donnerstag, 01.05.2014
Abgabe: Donnerstag, 08.05.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis II
2. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 5** (natürliche Matrixnormen) (6 Punkte)

1. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}\right\}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert.
2. Zeigen Sie, dass für diese Matrixnorm gelten $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ sowie $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.
3. Zeigen Sie, dass $\|A\|_1 = \max\limits_{i=1,\dots,n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ki}|$ und $\|A\|_\infty = \max\limits_{k=1,\dots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ki}|$.

   Bemerkung: $\|A\|_1$ wird aus nahe liegenden Gründen als *Spaltensummennorm*, $\|A\|_\infty$ als *Zeilensummennorm* von A bezeichnet.
4. Zeigen Sie, dass $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2$ erfüllt ist, dass aber im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

   Bemerkung: Die zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ gehörige Matrixnorm ist die *Spektralnorm*, d.h. $\|A\|_2$ ist die Wurzel des kleinsten Eigenwerts der symmetrischen Matrix $A^{\mathrm{T}}A$. $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ definiert offenbar auch eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$, die sogenannte *Frobeniusnorm*.

☐ **Aufgabe 6** (Konvergenz in metrischen Räumen) (6 Punkte)

Auf dem Raum X aller reellen Zahlenfolgen definieren wir eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ via

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

1. Zeigen Sie, dass d wohldefiniert ist, d.h. dass die Reihe stets konvergiert.
2. Zeigen Sie, dass d die Axiome einer Metrik erfüllt und (X, d) somit ein metrischer Raum ist.
3. Seien $\xi_k = (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \in X$ und $\bar{\xi} = (\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Zeigen Sie, dass die Folge $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ genau dann für $k \to \infty$ bzgl. d gegen $\bar{\xi} \in X$ konvergiert, wenn alle Komponentenfolgen $(x_{kn})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ für $k \to \infty$ bzgl. $|\cdot|$ gegen $\bar{x}_n \in \mathbb{R}$ konvergieren.

☐ **Aufgabe 7** (Stetigkeit in metrischen Räumen) (3 Punkte)

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Überprüfen Sie die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = d(x_0, x)$ auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.

☐ **Aufgabe 8** (Zusammenhang und Kompaktheit in normierten Räumen) (5 Punkte)

1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass alle Kugeln $K(x, r) = \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\} \subseteq X$ konvex und damit insbesondere wegzusammenhängend sind.
2. Zeigen Sie, dass wegzusammenhängende Mengen in X speziell zusammenhängend sind.
3. Seien $X = \mathbb{R}^n$ und $O \subseteq X$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie, dass O wegzusammenhängend ist. ($\star\star$)
4. Zeigen Sie, dass Kugeln $K(x, r)$ im $\mathbb{R}^n$ stets kompakt sind. ($\star\star$)

   Bemerkung: Es gilt sogar: Die Einheitskugel (und damit alle Kugeln) eines normierten Raumes ist *genau dann* kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.