Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2014

Ausgabe: Donnerstag, 08.05.2014
Abgabe: Donnerstag, 15.05.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis II
3. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 9** (Ableitungsbegriffe) (6 Punkte)

1. Seien $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $D = \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \|x\|_2^\alpha$.

   Bestimmen Sie die (erste) Ableitung, die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung, die Richtungsableitungen, die Jacobi-Matrix und den Gradienten von f. Geben Sie dabei auch an, um welche Art von Objekten es sich jeweils handelt.

   Für welche Punkte $x \in D$ gilt $\Delta f(x) = 0$?

2. Wir setzen die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
   im Nullpunkt durch 0 fort. Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ stetig ist und längs welcher Richtungen f dort differenzierbar ist.

☐ **Aufgabe 10** (Abstraktes Differenzieren) (5 Punkte)

1. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$ die zugehörige quadratische Form und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ermitteln Sie anhand der Definition die erste Ableitung $f'(x_0)$ von f im Punkt x_0. ($\star\star$)

2. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Leiten Sie aus der Kettenregel die Produktregel her, indem Sie $f \cdot g$ als die Komposition der Produktfunktion $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = xy$ mit der Paarfunktion $\omega : U \to \mathbb{R}^2$, $\omega(z) = (f(z), g(z))$ auffassen.

   Hinweis: Leiten Sie zunächst die Ableitungen für π und ω anhand der Definition her.

☐ **Aufgabe 11** (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die im Nullpunkt durch 0 fortgesetzte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$
im Ursprung unstetig, aber in alle Richtungen differenzierbar ist.

☐ **Aufgabe 12** (Eulersche Homogenitätsrelation) (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Zeigen Sie, dass genau dann ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ existiert, wenn $\langle \nabla f(x), x\rangle = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ erfüllt ist.

Bemerkung: f heißt in dem Fall *positiv homogen* vom Grad α.