Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2014

Ausgabe: Donnerstag, 15.05.2014
Abgabe: Donnerstag, 22.05.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis II
4. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 13** (Richtungsableitungen) (5 Punkte)

Seien $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \text{ und } x \neq 0\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1 & (x,y) \in M \\ 0 & (x,y) \notin M \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

1. f ist in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar $\Leftrightarrow (x,y) \notin M$.
2. Für jedes $\nu \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\nu\| = 1$ existiert die Richtungsableitung $\mathrm{D}_\nu f(0)$.
3. f ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

☐ **Aufgabe 14** (Beweisaufgabe zur Differenzierbarkeit) (5 Punkte)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung der Null, $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig und f in 0 differenzierbar mit $f(0) = 0$.

Zeigen Sie, dass $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = f(x)g(x)$ in 0 differenzierbar ist, und bestimmen Sie $\nabla\psi(0)$.

☐ **Aufgabe 15** (Rotationsinvarianz des Laplace-Operators) (5 Punkte)

Seien $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, d.h. es gelte $A^{\mathrm{T}}A = \mathrm{Id}$. Zeigen Sie: $(\Delta u) \circ A = \Delta(u \circ A)$.

☐ **Aufgabe 16** (Laplace-Operator in Polarkoordinaten) (5 Punkte)

Bezeichne $\Phi : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(r,\varphi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ die Polarkoordinatentransformation.

Zeigen Sie, dass für jedes $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gilt

$$(\Delta f) \circ \Phi = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(f \circ \Phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \Phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(f \circ \Phi).$$