Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2014

Ausgabe: Donnerstag, 22.05.2014
Abgabe: Freitag, 30.05.2014, 8:15 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis II
5. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 17** (Mittelwertsatz) (5 Punkte)

1. Seien $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gegeben durch $f(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$ und $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie ein x zwischen ξ und ζ mit $f(\xi) - f(\zeta) = f'(x)(\xi - \zeta)$.
2. Sei $n \geq 2$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass ein $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und Punkte $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle x zwischen ξ und ζ gilt $f(\xi) - f(\zeta) \neq f'(x)(\xi - \zeta)$.

☐ **Aufgabe 18** (Satz von Taylor) (4 Punkte)

1. Bezeichne $B_\infty^{0,1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel bzgl. der Supremumsnorm. Bestimmen Sie am Entwicklungspunkt $(0,0,0)$ das Taylor-Polynom zweiten Grades $\mathcal{T}_f^2$ der Funktion $f : B_\infty^{0,1} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 \cos x_2 \exp x_3$.
2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\|_\infty \leq 10^{-2}$ gilt $|f(x) - \mathcal{T}_f^2(x)| \leq 10^{-5}$. ($\star\star$)

☐ **Aufgabe 19** (Eindeutigkeit der Taylor-Approximation) (5 Punkte)

1. Berechnen Sie das Taylor-Polynom $\mathcal{T}_f^2$ zweiten Grades zu der durch $f(x,y) = \sin(\exp(xy) - 1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, gegebenen Funktion im Ursprung $(0,0)$.
2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_f^2$ der folgenden Approximationsbedingung genügt:
$$\lim_{R \to 0} (R^{-2} \sigma_R) = 0, \qquad \text{wobei} \qquad \sigma_R = \sup_{x^2+y^2=R^2} |f(x,y) - \mathcal{T}_f^2(x,y)|.$$
3. Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}_f^2$ das einzige Polynom zweiten Grades der Form $a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$ ist, welches diese Approximationseigenschaft besitzt.

☐ **Aufgabe 20** (Parameterabhängige Optimierung) (6 Punkte)

Gegeben sei für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 - cx$. Bestimmen Sie die Anzahl der kritischen Stellen von f_c in Abhängigkeit von c und lokalisieren Sie diese, indem Sie sie berechnen oder zumindest Umgebungen angeben, in welchen sie liegen.
