



Ausgabe: Donnerstag, 29.05.2014

Abgabe: Donnerstag, 05.06.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis II

6. Übungsblatt

□ **Aufgabe 21** (Kombinatorik der Taylor-Formel) (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass es zu $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, n\}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ stets genau $\frac{k!}{\alpha!}$ k -Tupel $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ gibt, bei welchen der Eintrag 1 genau α_1 -mal auftritt, der 2 genau α_2 -mal u.s.w.
2. Bestimmen Sie zu $k = 1, 2, 3, 4$ alle α mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ und geben Sie alle zugehörigen k -Tupel an.
Hinweis: Unterscheiden sich zwei α nur in der *Reihenfolge* der Einträge, so müssen sie nicht gesondert behandelt werden.

□ **Aufgabe 22** (Zustandsgleichungen der Gasdynamik) (5 Punkte)

1. Für ein ideales Gas mit Druck P , Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ für eine gewisse Gaskonstante c . Zeigen Sie:

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -1. \quad (\star)$$

2. Für ein reales Gas mit Druck P , Molvolumen V und absoluter Temperatur T gilt mit gewissen Materialkonstanten a, b, r die Van der Waalsche Gleichung

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = rT$$

Zeigen Sie, dass dieses Gas ebenfalls der obigen Differenzialgleichung genügt.

Hinweis: Sie können hier den formalen Calculus anwenden, d.h. können annehmen, dass die Funktionen hinreichend glatt sind und beim Auflösen der Gleichungen nirgends durch Null dividiert wird. Kriterien zur lokalen Auflösbarkeit solcher *impliziter Gleichungen* und Variablenelimination für nichtlineare Gleichungssysteme werden später behandelt.

□ **Aufgabe 23** (Optimalitätskriterien) (5 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2) \exp(-x^2 - 4y^2).$$

□ **Aufgabe 24** (Extrempunkte längs von Geraden und Kurven) (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4,$$

auf allen Geraden durch $(0, 0)$ dort ein Minimum hat.

2. Überprüfen Sie, ob der Nullpunkt ein lokales Minimum von f ist.
-