Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2014

Ausgabe: Donnerstag, 05.06.2014
Abgabe: Donnerstag, 12.06.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis II
7. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 25** (Konvexität) (5 Punkte)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. f ist konvex, d.h. $\forall x, y \in \Omega : \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
2. $\nabla^2 f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in \Omega$, d.h. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla^2 f(x)\xi, \xi\rangle \geq 0$.

☐ **Aufgabe 26** (Optimalitätskriterien) (5 Punkte)

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $g(x) = |f(x)|$. Zeigen Sie:

1. Ist $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in \Omega$, dann besitzt g in Ω kein Maximum.
2. Gilt zusätzlich $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$, so besitzt g in Ω auch kein Minimum.

Liefern diese Aussagen *notwendige* oder *hinreichende* Optimalitätskriterien?

☐ **Aufgabe 27** (Kritische Punkte und lokale Extremstellen) (5 Punkte)

Finden Sie Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

1. f besitzt in (x,y) ein lokales, isoliertes Minimum und $\nabla^2 f(x,y)$ ist positiv definit.
2. f besitzt in (x,y) einen Sattelpunkt und $\nabla^2 f(x,y)$ ist indefinit.
3. f besitzt in (x,y) ein lokales, nicht isoliertes Minimum und $\nabla^2 f(x,y)$ ist positiv semidefinit.
4. f besitzt in (x,y) einen Sattelpunkt und $\nabla^2 f(x,y)$ ist positiv semidefinit.
5. f besitzt in (x,y) ein lokales, isoliertes Minimum und $\nabla^2 f(x,y)$ ist positiv semidefinit.

☐ **Aufgabe 28** (Volumenoptimierung unter Nebenbedingungen) (5 Punkte)

Bestimmen Sie das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders, welcher dem Ellipsoid

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

mit $a, b, c > 0$ einbeschrieben ist.
