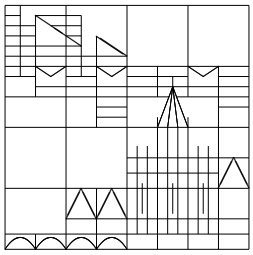
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2014



Ausgabe: Donnerstag, 12.06.2014
Abgabe: **Mittwoch, 18.06.2014, 18:00 Uhr**, in den Briefkästen auf F4

Analysis II
8. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 29** (Abstandsminimierung unter Nebenbedingungen) (7 Punkte)

Bezeichne Γ die Schnittkurve der affinen Ebene E mit dem Kegel K,

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y + 4z = 6\}, \qquad K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 2x^2 + y^2\}.$$

Überprüfen Sie, ob es auf Γ Punkte mit minimalem bzw. maximalem Abstand zum Nullpunkt gibt, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

☐ **Aufgabe 30** (Optimalitätskriterien zweiter Ordnung unter Nebenbedingungen) (7 Punkte)

1. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$ auf der Oberfläche des Ellipsoids $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$ auf lokale und globale Maxima und Minima.
2. Überprüfen Sie, ob das unten angegebene Optimalitätskriterium eine Aussage dazu liefert, ob die mit den Lagrange-Bedingungen erster Ordnung gefundenen Punkte lokale Extremstellen sind. ($\star$)

Hinweis: Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^m)$, $m < n$ und $\operatorname{rang}(\nabla g(x)) = m$ für alle $x \in U$. Falls dann ein Lagrangemultiplikator $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ existiert, so dass der Punkt $(x_0,\lambda_0) \in U \times \mathbb{R}^m$ eine kritische Stelle der Lagrange-Funktion $\mathscr{L}(x,\lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x)\rangle$ ist, und ist die Hesse-Matrix $\nabla^2_{xx}\mathscr{L}(x_0,\lambda_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ negativ bzw. positiv definit auf dem Tangentialraum $\mathcal{T}_g(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x_0), x\rangle = 0,\ i = 1,...,m\}$, so ist x_0 ein striktes lokales Maximum bzw. Minimum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

☐ **Aufgabe 31** (Kurvenlängen) (6 Punkte)

Betrachten Sie die Kurvenparametrisierungen $\alpha : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\beta : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad \beta(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos t \\ t^2 \sin t \\ \frac{1}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Längen der zugehörigen Kurven.

☐ **Aufgabe 32** (Rektifizierbarkeit) (0 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \left(t, t^2 \cos\frac{\pi}{t^2}\right) \qquad \text{und} \qquad \gamma(0) = (0,0)$$

parametrisierte Kurve differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar auf dem Kompaktum $[0,1]$ ist. ($\star$)

2. Zeigen Sie weiter, dass die Kurve keine endliche Länge besitzt, d.h. dass für die Menge

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \{(t_1,...,t_N) \in \mathbb{R}^N \mid 0 \le t_1 < \cdots < t_N \le 1\}$$

aller Zerlegungen des Intervalls $[0,1]$ gilt $\sup\limits_{Z\in\mathcal{Z}} \sum\limits_{i=2}^{\sharp Z} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = +\infty$. ($\star$)