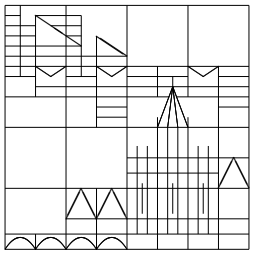
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch
Sommersemester 2014



**Ausgabe:** Donnerstag, 19.06.2014
**Abgabe:** Donnerstag, 26.06.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

# Analysis II
# 9. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 33** (Evolvente des Kreises) (5 Punkte)

Der Endpunkt eines straff gespannten, vom Einheitskreis abgewickelten Fadens der Länge $\pi$ beschreibt eine ebene Kurve, die *Evolvente* des Kreises. Die Anfangslage des Fadenendes sei der Punkt $(1, 0)$; es wird gegen den Uhrzeigersinn abgewickelt.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung $\gamma(t)$ des Evolventenbogens, die Koordinaten des Fadenendes, nachdem der Faden vollständig abgewickelt ist, sowie die Länge der Evolvente.

---

☐ **Aufgabe 34** (Zykloide) (5 Punkte)

Ein Rad mit Radius $R > 0$ rollt mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$ über die $x$-Achse. Auf dem Rad ist ein Punkt $P = (p_1, p_2)$ markiert.

1. Habe die Radachse zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinaten $M(0) = (0, R)$ und habe $P(0)$ die Koordinaten $p_1(0) = 0$ und $p_2(0) = R + r$. Bestimmen Sie die Position $x = p_1(t)$ und $y = p_2(t)$ des Punktes zur Zeit $t$.

   **Hinweis:** Addieren Sie zum Positionsvektor $M(t)$ der Radachse den um den Winkel $\alpha(t)$ rotierenden Verbindungsvektor zwischen $M(t)$ und $P(t)$.

2. Bestimmen Sie die Zeiten $t$, zu denen die Momentangeschwindigkeit $\|\dot{P}(t)\|$ maximal bzw. minimal wird. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.

3. Zeichnen Sie die Positionskurven von $P_r$ für $R = 1$, $t \in [0, 6\pi]$ und $r = \frac{1}{2}$ bzw. $r = 1$ in ein gemeinsames Schaubild.

---

☐ **Aufgabe 35** (Parametrisierung von Kurven und Flächen) (5 Punkte)

Skizzieren Sie (wenn's geht ohne vorherige Zuhilfenahme von Graphikprogrammen) die folgenden Objekte:

$$\gamma_1(\mathbb{R}) \text{ für } \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \Gamma_1([0,1]\times[0,2\pi]) \text{ für } \Gamma_1(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ v \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\gamma_2(\mathbb{R}) \text{ für } \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \Gamma_2([0,2\pi]\times[0,\pi]) \text{ für } \Gamma_2(u,v) = \begin{pmatrix} \sin(u)\cos(v) \\ \sin(u)\sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

---

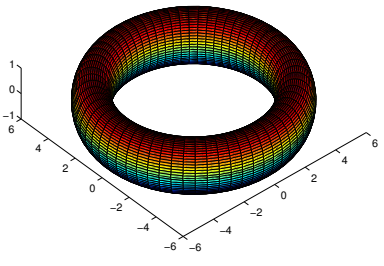
☐ **Aufgabe 36** (Parametrisierung des Torus) (5 Punkte)

1. Finden Sie eine Parametrisierung $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ des Torus ("Doughnuts") mit "Durchmesser" $R$ und "Dicke" $r$.

   **Hinweis:** Definieren Sie zunächst einen Kreis in der $xy$-Ebene vom Radius $R$ und lassen Sie anschließend um diesen einen Kreis mit Radius $r$ rotieren.

2. Sei $P = f(u, v)$ ein Punkt auf dem Torus. Parametrisieren Sie die Tangentialebene an den Torus in $P$.

3. Seien $x \in [0, 2\pi]^2$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie den Verlauf der Kurve $\gamma(t) = f(x + t\xi)$. Wie wirken sich große bzw. kleine Komponenten von $\xi$ aus?



---