



Ausgabe: Donnerstag, 26.06.2014

Abgabe: Donnerstag, 03.07.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

Analysis II

10. Übungsblatt

□ Aufgabe 37 (Geometrie von Raumkurven)

(5 Punkte)

1. Sei $\gamma \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine beliebige Parameterdarstellung einer Kurve Γ (d.h. nicht notwendigerweise eine Bogenlängenparametrisierung) mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Berechnen Sie zu $t \in [a, b]$ die (skalare) Krümmung $\kappa(t)$ und den Krümmungskreismittelpunkt $\mu(t)$.
2. Begründen Sie: Die Kurve verläuft lokal bei $\gamma(t)$ in der *Schmiegeebene* von $\gamma(t)$. (★)
3. Sei nun speziell $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, eine Parametrisierung des Kreises mit Radius 2. Bestimmen Sie die Kurve μ der Krümmungskreismittelpunkte der durch γ parametrisierten Kreiskurve.

Bemerkung: Die Krümmungskreismittelpunkte parametrisieren also selbst wieder eine zu γ gehörige Kurve, welche als *Evolute* bezeichnet wird. Die in Aufgabe 33 behandelte Kurve, welche durch tangentialer Abwicklung aus einer anderen Kurve (in dem Fall ebenfalls der Kreiskurve) entsteht, wird korrekterweise als *Evolvente* bezeichnet. Speziell ist die Evolvente der Evolute wieder die Ausgangskurve.

□ Aufgabe 38 (Urbild- σ -Algebra)

(5 Punkte)

Seien X, Y Mengen, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $\mathcal{Y}$ eine σ -Algebra über Y , d.h. $(Y, \mathcal{Y})$ ein Messraum. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{X} = \{f^{-1}(y) \mid y \in \mathcal{Y}\}$ eine σ -Algebra über X ist, also f einen Messraum $(X, \mathcal{X})$ induziert.

□ Aufgabe 39 (Dirac-Maß und Zählmaß)

(5 Punkte)

Sei X eine beliebige nichtleere Menge. $\mathcal{P}(X)$ bezeichne die Potenzmenge von X , welche offenbar eine σ -Algebra über X ist. Weiter sei $x \in X$.

1. Zeigen Sie, dass das Diracsche Delta $\delta_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\delta_x(A) = 1$ genau für $x \in A$ ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ definiert.
2. Zeigen Sie, dass das Zählmaß $\zeta : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ mit $\zeta(A) = |A|$ ebenfalls ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ liefert.
3. Lassen sich δ_x bzw. ζ auch unabhängig von einer Referenzmenge X definieren? (★)

□ Aufgabe 40 (unendliche Maßräume)

(5 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum mit $\mu(X) = \infty$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass zu jeder Schranke $S > 0$ eine Menge $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $S < \mu(A) < \infty$.