



**Ausgabe:** Donnerstag, 10.07.2014

**Abgabe:** Donnerstag, 17.07.2014, 10:00 Uhr, in den Briefkästen auf F4

## Analysis II 12. Übungsblatt

**Aufgabe 45** (Integral des Sinus Cardinalis) (5 Punkte)

Verifizieren Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral  $\int_0^{\infty} \text{sinc}(x) dx$  den Wert  $\frac{\pi}{2}$  besitzt. Zeigen Sie dazu:

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt, \quad \int_0^{\infty} \sin(x)e^{-xt} dx = \frac{1}{1+t^2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**Hinweis:** Der Satz von Fubini darf hier ohne Begründung auf das entstehende Doppel-Riemann-Integral angewendet werden.

**Aufgabe 46** (Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral) (5 Punkte)

Überprüfen Sie die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Lebesgue-Integralen

$$x_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \exp\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

**Aufgabe 47** (Kurven- und Volumenintegrale) (5 Punkte)

1. Sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x, y) = xy$ . Berechnen Sie über die in algebraischer Form gegebenen Ellipse  $\Gamma = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} f(x, y) d(x, y).$$

2. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der vom Dreieck mit den Eckpunkten  $(0, 0, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ , von der Fläche  $z = xy$  und von der Ebene  $\frac{1}{2}x + y = 1$  begrenzt wird.

**Aufgabe 48** (Guldinsche Formeln vs. mehrdimensionale Integration) (5 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des Torus mit Radien  $r, R$  sowohl mit den Guldinschen Formeln aus Aufgabe AI.44 als auch mit den Formeln für Volumen- und Flächenintegrale.

**Bemerkung:** Dies ist das letzte Übungsblatt der Analysis II, das korrigiert und bewertet wird. Das wichtige letzte Kapitel der Vorlesung mit dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit und dem Satz über implizite Funktionen, welche für Parametertransformationen, Variableneliminierung, Auflösen nichtlinearer Gleichungssysteme, den Lagrange-Kalkül zur Lösung von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen und vieles mehr benötigt werden, wird auf einem freiwilligen dreizehnten Übungsblatt behandelt.

**Hinweis zur Klausur:** Die Vorgehensweise zu Prüfungsanmeldungen für die Klausuren Analysis II und Analysis I & II finden Sie auf der Übungshomepage. Beachten Sie bitte, dass eine Teilnahme an den beiden Klausuren nur bei regulärer Anmeldung möglich ist. Ende August wird wie im letzten Semester ein Hinweisblatt zur Bearbeitung der Klausur online gestellt.