



Ausgabe: Donnerstag, 17.07.2014

Abgabe: Die Aufgaben sind freiwillig und werden nicht bewertet.

Analysis II

13. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 49** (Satz über lokale Umkehrbarkeit)

(0 Punkte)

Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$T(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) \cos(\varphi) \\ \sinh(\theta) \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

1. Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass T lokal umkehrbar ist, und ermitteln Sie alle Punkte $(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2$, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist.
2. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Koordinatenlinien von φ und θ .

☐ **Aufgabe 50** (Satz über implizite Funktionen)

(0 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1.$$

1. Zeigen Sie, dass durch $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x, y) = (1, 1)$ implizit eine Funktion $z = z(x, y)$ mit $z(1, 1) = 1$ definiert ist.
2. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von z nach x und y im Punkt $(1, 1)$.

☐ **Aufgabe 51** (Variableneliminierung bei nichtlinearen Gleichungssystemen)

(0 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$x + y - z = -1, \quad x + y^2 + z = 1$$

lokal um die spezielle Lösung $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ nach x, y aufgelöst werden kann, d.h. dass es eine Umgebung $U_z \subseteq \mathbb{R}$ um 1 gibt, so dass für alle $z \in U_z$ Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ derart existieren, dass (x, y, z) eine Lösung des Systems ist.

2. Berechnen Sie durch implizites Differenzieren die Ableitungen der beiden Auflösungsfunktionen in z_0 .
3. Geben Sie den maximalen Bereich U_z an.
4. Zeigen Sie, dass das System global nach x, z aufgelöst werden kann.

☐ **Aufgabe 52** (Integralsatz von Gauß)

(0 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gaußsche Integralformel nicht für die Integration des Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ über den Viertelkreis K gilt:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ \& } x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad v(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$