Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel.
Sabine Burgdorf/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

3. Übungsblatt
Abgabe am am Freitag, dem 07.11.2007, **bis 10:15 Uhr**
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

9. Die *Kleinsche Vierergruppe* ist gegeben durch die Menge $V = \{e, a, b, c\}$ und die Verknüpfung $*$, welche durch folgende Verknüpfungstafel festgelegt ist.

$*$	e	a	$\boxed{b}$	c
e	e	a	b	c
$\boxed{a}$	a	e	$\boxed{c}$	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

D.h. es gilt beispielsweise $\boxed{a * b = c}$. Zeigen Sie, dass $(V, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

10. (a) Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit Verknüpfung $*$ und neutralem Element e. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in G$ folgende Aussagen gelten:

(1) $a * b = a \implies b = e$
(2) $\overleftarrow{(a * b)} = \overleftarrow{b} * \overleftarrow{a}$
(3) $a * a = e \implies a = \overleftarrow{a}$
(4) $(\forall a \in G : a * a = e) \implies (\forall a, b \in G : a * b = b * a)$

(b) Seien G, H zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass dann auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

11. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen mit der angegebenen Verknüpfung jeweils eine Gruppe bilden. Dabei sei $(G, *)$ eine Gruppe und X eine beliebige Menge.

(a) $\mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt $\times$
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ xy = 1\}$ mit $(x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$
(c) $\{\varphi : G \to G\,;\ \varphi \text{ ist Gruppenhomomorphismus}\}$ mit der Komposition $\circ$
(d) $\{f : X \to G\}$ mit $(f \star g)(x) = f(x) * g(x)$

12. Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X) = \{A; A \text{ ist Teilmenge von } X\}$ die zugehörige Potenzmenge von X. Wir definieren eine Verknüpfung Δ zwischen zwei Elementen $A, B \in \mathcal{P}(X)$ durch die symmetrische Differenz, also $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ eine abelsche Gruppe ist, in der jedes Element zu sich selbst invers ist, d.h. für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ gilt $A \,\Delta\, A = e$.

(b) Sei $X = \{x, y\}$. Zeigen Sie, dass die Verknüpfungstafel von $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ der Verknüpfungstafel der Kleinschen Vierergruppe $(V, *)$ aus Aufgabe 9 entspricht.