Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel.
Sabine Burgdorf/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

7. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, dem 07. Dezember 2007, **bis 10:15 Uhr**
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

25. Sei K ein Körper, $S = (s_1, \dots, s_k) \subseteq V$ eine endliche Familie. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) S ist linear unabhängig, falls kein Element von S Vielfaches eines anderen Elementes von S ist.

(b) Wenn S linear unabhängig ist, so ist für alle $v \in \mathrm{Lin}(s_1, \dots, s_k)$ die Familie $(s_1, \dots, s_k, v)$ linear abhängig.

26. Seien V, W K-Vektorräume, $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen oder widerlegen Sie

(a) $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ sind linear unabhängig $\implies$ $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig

(b) $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig $\implies$ $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$ sind linear unabhängig

27. Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Weiter sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, welcher *idempotent* ist, d.h. es gilt $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Der Kern von φ sowie die Bildmenge von φ sind gegeben durch $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{v \in V;\ \varphi(v) = 0\}$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) = \{v \in V;\ \exists w \in V \text{ mit } \varphi(w) = v\}$.
Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist ein Untervektorraum von V

(b) $\mathrm{Bild}(\varphi) \cap \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$

(c) $\mathrm{Bild}(\varphi) + \mathrm{Kern}(\varphi) = V$

(d) $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \dim V$

28. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen aufgefasst als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendliche Dimension hat. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Sei $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots,\} \subset \mathbb{Z}$ die Menge aller Primzahlen in $\mathbb{Z}$. Bekanntlich ist $\mathbb{P}$ unendlich. Zeigen Sie, dass die Elemente $\{\log(p)\ ;\ p \in \mathbb{P}\}$ eine $\mathbb{Q}$-linear-unabhängige Familie in $\mathbb{R}$ bilden, wobei log den natürlichen Logarithmus bezeichnet.
(Dass jede ganze Zahl sich *eindeutig* als Produkt von Primfaktoren schreiben lässt, darf hier ohne Beweis verwendet werden; ebenso die üblichen Rechenregeln für den Logarithmus.)