Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Gottfried Barthel.
Sabine Burgdorf/Daniel Plaumann
WS 2007/2008

LINEARE ALGEBRA I

8. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, dem 21. Dezember 2007, **bis 10:15 Uhr**
in den entsprechenden Briefkasten neben Raum F411

Es sei stets K ein Körper.

29. Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension d, und sei H eine *Hyperbene* in V, d.h. ein Untervektorraum von V mit $\dim_K(H) = d - 1$. Zeigen Sie: Für jeden Untervektorraum U von V mit $U \not\subseteq H$ gilt

$$\dim(U \cap H) = \dim(U) - 1.$$

30. Sei V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum, und sei U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie: Es gibt einen Untervektorraum U' von V derart, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $U + U' = V$.
(2) $U \cap U' = \{0\}$;

Der Untervektorraum U' heißt ein *Komplement von U in V.*
(*Hinweis: Benutzen Sie den Basis-Ergänzungssatz.*)

31. Es seien V und W zwei K-Vektorräume mit V endlich-erzeugt, und sei $\varphi\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist φ injektiv, so gilt $\dim\bigl(\mathrm{Bild}(\varphi)\bigr) = \dim(V)$.
(b) Es gilt:

$$\dim\bigl(\mathrm{Kern}(\varphi)\bigr) + \dim\bigl(\mathrm{Bild}(\varphi)\bigr) = \dim(V).$$

(*Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 30 mit $U := \mathrm{Kern}(\varphi)$ an. Was können Sie über $\varphi|_{U'}$ sagen?*)

32. Es sei V ein endlich-erzeugter K-Vektorraum, und sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn φ surjektiv ist.