Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Algebraische Grundstrukturen

Konvention

Sei ab jetzt X stets eine nicht leere Menge.

Definition

$(X, *)$ heißt eine *Magma*, falls $*$ eine *(binäre) Verknüpfung* auf X ist, d.h. falls

(0) $* : \begin{array}{rl} X \times X \to & X \\ (x, y) \mapsto & x * y \end{array}$ eine Abbildung ist.

Beispiele

$(\mathcal{P}(X), \setminus)$, $(\mathcal{P}(X), \cap)$, $(\mathcal{P}(X), \cup)$.

Definition

Eine Magma $(X, *)$ heißt eine *Halbgruppe*, falls $*$ *assoziativ* ist, d.h. falls

(1) $\forall x, y, z \in X : (x * y) * z = x * (y * z)$.

Beispiele

$(\mathbb{N}, +)$, $(\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, +)$, $(\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \cdot)$.

Definition

Eine Halbgruppe $(X, *)$ heißt ein *Monoid*, falls $(X, *)$ ein *neutrales Element* besitzt, d.h. falls

(2) $\exists e \in X : \forall x \in X : e * x = x = x * e$.

Beispiel

Sei $M := \{1, 2, 3\}$ und $A := \{\mathrm{id}, f, g, h\}$ mit $f \equiv 1$, $g \equiv 2$ und $h(1) = 2$, $h(2) = 1$, $h(3) = 3$, wobei $\mathrm{id}, f, g, h : M \to M$. Dann ist $(A, \circ)$ ein Monoid.

Definition

Eine Halbgruppe $(X, *)$ heißt eine *Gruppe*, falls jedes Element *invertierbar* ist, d.h. falls

(3) $\forall x \in X : \exists y \in X : x * y = e = y * x$.

Beispiele

Gruppe der reellen $(n \times n)$-Matrizen $(\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n), +)$, Kleinsche Vierergruppe, $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$.

Definition

Eine Gruppe $(X, *)$ heißt *abelsch*, falls $*$ *kommutativ* ist, d.h. falls

(4) $\forall x, y \in X : x * y = y * x$.

Beispiele

Die zuletzt genannten, außerdem $(\mathcal{P}, \Delta)$, $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$.

Definition

$(X,+,\cdot)$ heißt ein *Ring*, falls $+$ und $\cdot$ Verknüpfungen auf X sind, so dass gilt:

(1) $(X,+)$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) $(X,\cdot)$ ist eine Halbgruppe.

(3) Es gelten die *Distributivgesetze*, d.h.

$\forall x,y,z \in X : x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$ und $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$.

Beispiele

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+,\cdot)$, $\mathbb{R}[X] = \{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \mid n \in \mathbb{Z},\ a_n,...,a_0 \in \mathbb{R}\}$, $(\mathcal{P}(X),\Delta,\cap)$, $(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$.

Bemerkung

Für gewöhnlich betrachten wir kommutative Ringe mit Einselement, d.h. Ringe $(X,+,\cdot)$, bei denen $(X,\cdot)$ ein kommutativer Monoid ist.

Definition

Sei $(X,+,\cdot)$ ein Ring. $(X,+,\cdot)$ heißt ein *Körper*, falls $(X\backslash\{\mathbb{0}\},\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, d.h. falls $(X,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring mit $\mathbb{1}$ ist, in dem jedes von $\mathbb{0}$ verschiedene Element bzgl. $\cdot$ invertiervar ist.

Beispiele

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$, $\mathbb{R}(X) = \{\frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{R}[X],\ q \not\equiv 0\}$, $\mathbb{F}_2 = (\{0,1\},+,\cdot)$.

Definition

Sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring mit $\mathbb{1}$. $\mathcal{A}$ heißt ein $\mathcal{R}$-*Modul*, falls es eine Verknüpfung $\begin{array}{l}\mathcal{R}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}\\ (r,a) \ \mapsto ra\end{array}$ gibt, so dass gelten:

(1) $(\mathcal{A},+)$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) $\forall q,r \in \mathcal{R},\ a,b \in \mathcal{A} : r(a+b) = ra+rb$ und $(q+r)a = qa+ra$.
(3) $\forall q,r \in \mathcal{R},\ a \in \mathcal{A} : (rq)a = r(qa)$.
(4) $\forall a \in \mathcal{A} : 1a = a$.

Ist $\mathcal{R}$ sogar ein Körper, so heißt $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{R}$-*Vektorraum*.

Ist $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{R}$-Modul, der zusätzlich eine innere Verknüpfung $\begin{array}{l}\mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}\\ (a,b) \ \mapsto ab\end{array}$ besitzt, so dass gelten
(5) $\forall a,b,c \in \mathcal{A} : a(bc) = (ab)c$,
(6) $\forall a,b,c \in \mathcal{A} : (a+b)c = ac+bc$ und $a(b+c) = ab+ac$,
(7) $\forall r \in \mathcal{R},\ a,b \in \mathcal{A} : r(ab) = (ra)b$,

so heißt $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{R}$-*Algebra*.

Bemerkung

Für gewöhnlich betrachten wir kommutative $\mathcal{R}$-Algebren mit Eins.