Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Grundlagen der Vektorrechnung

Definition

Sei K ein Körper. V heißt ein K-*Vektorraum*, falls es Verknüpfungen $\begin{array}{l} V \times V \to V \\ (v,w) \mapsto v+w \end{array}$ und $\begin{array}{l} K \times V \to V \\ (\lambda, v) \mapsto \lambda v \end{array}$ gibt, so dass gelten:

(1) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) $\forall \lambda, \mu \in K,\ v, w \in V : \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ und $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$.
(3) $\forall \lambda, \mu \in K,\ v \in V : (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.
(4) $\forall v \in V : 1v = v$.

Bemerkung

Wir betrachten meist Vektorräume V der endlichen Dimension n.

Vorgriff

Fixieren wir eine Basis $\mathfrak{B} := \{v_1, ..., v_n\}$ von V, dann lässt sich jedes $v \in V$ darstellen als $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ für eindeutig bestimmte $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$.

Wir erhalten eine bijektive Abbildung $\kappa_{\mathfrak{B}} : \begin{array}{l} V \to K^n \\ v \mapsto (\lambda_1, ..., \lambda_n) \end{array}$, die *Koordinatenabbildung* bzgl. $\mathfrak{B}$.

Definition

Eine Abbildung $||\cdot|| : V \to K$ heißt eine *Norm*, wenn gelten:

(1) $\forall v \in V : ||v|| = 0 \Rightarrow v = 0$ *(Definitheit)*.
(2) $\forall v \in V, \lambda \in K : ||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$.
(3) $\forall v, w \in V : ||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$ *(Dreiecksungleichung)*.

Bemerkung

(1) Es gelten stets $||0|| = 0$ und $\forall v \in V : ||v|| \geq 0$.
(2) Wir können V stets mit der *euklidischen Norm* $||v|| := \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$ versehen, wobei $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \kappa_{\mathfrak{B}}(v)$.
(3) Wir nennen $v \in V$ *normiert*, wenn $||v|| = 1$ gilt.

Definition

Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ heißt ein *Skalarprodukt* auf V, wenn gilt:

(1) $\forall u, v, w \in V, \lambda \in K : \langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *(Linearität in der ersten Komponenten)*.
(2) $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ *(Symmetrie)*.
(3) $\forall v \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$ *(Positivität)*.
(4) $\forall v \in V : \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ *(Definitheit)*.

Bemerkung

(1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist *bilinear*, d.h. es gilt auch $\forall u, v, w \in V, \lambda \in K : \langle u, \lambda v + w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.
(2) In $V = \mathbb{R}^2$ bzw. $V = \mathbb{R}^3$ gilt: $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = ||v|| ||w|| \cos \sphericalangle(v, w)$.
(3) $\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$ mit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \kappa_{\mathfrak{B}}(v)$ und $(\mu_1, ..., \mu_n) = \kappa_{\mathfrak{B}}(w)$ definiert auf V ein Skalarprodukt.
(4) Setzt man $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in V$ beliebig, dann ist $||\cdot||$ eine Norm auf V.
(5) Gilt für gewisse $v, w \in V$, dass $\langle v, w \rangle = 0$, dann heißen v, w *orthogonal*.

Definition

Sei $\mathfrak{V} := (e_1, ..., e_n)$ eine Basis des Vektorraumes V. Dann heißt $\mathfrak{V}$ eine *Orthonormalbasis*, wenn alle $e_1, ..., e_n$ normiert und zueinander paarweise orthogonal sind, d.h. wenn für alle $i, j = 1, ..., n$ gilt: $\langle e_i, e_j \rangle = \{ {}^{1,\ i=j}_{0,\ i \neq j}$.

Bemerkung

Setzt man $e^{(i)} := (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ mit 1 an der i-ten Stelle, $1 \leq i \leq n$, dann bildet $\mathfrak{E} := (e^{(1)}, ..., e^{(n)})$ eine Orthonormalbasis von V, die sog. *kanonische Basis*. Die $e^{(i)}$ heißen die *kanonischen Einheitsvektoren*.

Definition

Hat V die Dimension 3, dann defineren wir das *Kreuzprodukt (Vektorprodukt)* auf V durch

$$v \times w := \begin{pmatrix} \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2 \\ \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \end{pmatrix},$$

wobei $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \kappa_{\mathfrak{V}}(v),\ (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \kappa_{\mathfrak{V}}(w)$.

Bemerkung

(1) $\forall v, w \in V : \langle v \times w, v \rangle = \langle v \times w, w \rangle = 0$.
(2) $\forall v, w \in V : v \times w = 0 \Leftrightarrow (\exists \lambda \in K : v = \lambda w$ oder $v = 0$ oder $w = 0)$.
(3) $\forall v, w \in V : v \times w = -(w \times v)$.
(4) $\forall v, w \in V, \lambda \in K : v \times \lambda w = \lambda(v \times w) = \lambda v \times w$.
(5) $\forall u, v, w \in V : u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$.

Merke

Für alle $u, v, w \in V$ gelten die folgenden beiden Identitäten:

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) &\overset{\text{Jacobi}}{=} 0 \\ (u \times v) \times w &\overset{\text{Graßmann}}{=} \langle w, u \rangle v - \langle v, w \rangle u. \end{aligned}$$

Bemerkung

Für die kanonische Basis $\mathfrak{E} = (e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$ von V gelten $e^{(1)} \times e^{(2)} = e^{(3)},\ e^{(2)} \times e^{(3)} = e^{(1)},\ e^{(3)} \times e^{(1)} = e^{(2)}$.

Definition

Für $u, v, w \in V$ heißt $\langle u \times v, w \rangle$ das *Spatprodukt* von u, v, w.

$|\langle u \times v, w \rangle|$ wird als das *Volumen* des von u, v, w aufgespannten *Spats* bezeichnet.

Bemerkung

(1) Mit $\kappa_{\mathfrak{V}}(u) = (\lambda_i),\ \kappa_{\mathfrak{V}}(v) = (\mu_i),\ \kappa_{\mathfrak{V}}(w) = (\nu_i)$ gilt:

$$\langle u \times v, w \rangle = \lambda_1(\mu_2\nu_3 - \mu_3\nu_2) + \lambda_2(\mu_3\nu_1 - \mu_1\nu_3) + \lambda_3(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1).$$

(2) $\forall u, v, w \in V : \langle u \times v, w \rangle = \langle v \times w, u \rangle = \langle w \times u, v \rangle$.