Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Matrizen und lineare Abbildungen

Definition

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter bezeichne $\mathfrak{M}_K(m,n)$ die Menge der $m \times n$-Matrizen $(a_{ij})_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq m}$ mit $a_{ij} \in K$.

Wir definieren auf $\mathfrak{M}_K(m,n)$ eine Addition, eine skalare Multiplikation und ein Nullelement:

$$\begin{aligned} A+B &:= (a_{ij}+b_{ij}), \\ \lambda A &:= (\lambda a_{ij}), \\ 0 &:= (0). \end{aligned}$$

Zu $A = (a_{ij})$ setzen wir $A^T := (a_{ji})$. Dann heißt A^T die zu A *transponierte* Matrix.

Lemma

Die $m \times n$-Matrizen bilden einen K-Vektorraum. Dieser ist isomorph zum K^{nm}.

Insbesondere gilt: $\dim_K \mathfrak{M}_K(m,n) = mn$.

Beweis

Rechne Vektorraumaxiome nach und zeige, dass $f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_K(m,n) & \to & K^{mn} \\ (a_{ij}) & \mapsto & (a_{11},...,a_{1n},...,...,a_{m1},...a_{mn}) \end{array}$ einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{M}_K(m,n)$ und K^{mn} definiert.

Definition

Zu $A \in \mathfrak{M}_K(m,n)$ und $B \in \mathfrak{M}_K(n,r)$ definieren wir ein *Matrixprodukt*:

$$(a_{ij})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n} \cdot (b_{ij})_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq r} \quad := \quad (c_{ij})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq r} \text{ mit } c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Konvention

(1) Wir bezeichnen ab jetzt zu $(a_{ij}) \in \mathfrak{M}_K(m,n)$ mit $A_i := (a_{i1},...,a_{in})$ die i-te Zeile der Matrix und $A^{(j)}$ die j-te Spalte.

(2) Bezeichne $\langle \cdot,\cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des K^n. Dann gilt $c_{ij} = \langle A_i, B^{(j)} \rangle$.

(3) Ab jetzt fassen wir die Elemente des K^n als Spalten auf.

Definition

Sei $A \in \mathfrak{M}_K(m,n)$. Dann heißt $L_m^n(A) : \begin{array}{ccc} K^n & \to & K^m \\ x & \mapsto & Ax \end{array}$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1n}x_n \\ & & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & ... & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_m x \end{pmatrix}$$

eine *lineare Abbildung*.

Bemerkung

(1) Anwenden von $L_m^n(A)$ auf einen Vektor x entspricht also der Multiplikation mit A von rechts.

(2) Speziell: $L_m^n(A)(e^{(i)}) = Ae^{(i)}$ ist gerade die i-te Spalte $A^{(i)}$ von A.

Satz

$L^n_m : \begin{matrix} \mathfrak{M}_K(m,n) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \\ A \mapsto L^n_m(A) \end{matrix}$ ist ein K-Vektorraum-Isomorphismus.

Beweis

(1) L^n_m ist surjektiv:

Sei $f : K^n \to K^m$ eine K-lineare Abbildung. Dann ist f eindeutig bestimmt durch

$$f(e^{(i)}) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Setze $A := (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_K(m,n)$, dann

$$L^n_m(A)(e^{(i)}) = Ae^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = f(e^{(i)}),$$

also $L^n_m(A) = f$.

(2) L^n_m ist K-linear:

Seien $A, B \in \mathfrak{M}_K(m,n)$. Dann gilt:

$$L^n_m(A+B)(e^{(i)}) = (A+B)e^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{1i} + b_{1i} \\ \dots \\ a_{mi} + b_{mi} \end{pmatrix} = Ae^{(i)} + Be^{(i)} = L^n_m(A)(e^{(i)}) + L^n_m(A)(e^{(i)}),$$

also $L^n_m(A+B) = L^n_m(A) + L^n_m(B)$. Außerdem

$$L^n_m(\alpha A)(e^{(i)}) = (\alpha A)e^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha a_{1i} \\ \dots \\ \alpha a_{mi} \end{pmatrix} = \alpha Ae^{(i)} = \alpha L^n_m(A(e^{(i)})),$$

also $L^n_m(\alpha A) = \alpha L^n_m(A)$.

(3) L^n_m ist injektiv:

Gelte $Ax = 0$ für alle $x \in K^n$, dann $A = 0$, denn gäbe es ein $a_{ij} \neq 0$, dann steht im i-ten Eintrag des Vektors $Ae^{(j)}$ gerade a_{ij}, also $Ae^{(j)} \neq 0$.

Bemerkung

Die Abbildung $(L^n_m)^{-1} : \begin{matrix} \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \to & \mathfrak{M}_K(m,n) \\ f & \mapsto (f(e^{(1)})), \dots, f(e^{(n)}) \end{matrix}$ ist K-linear.

Behauptung

Seien $A \in \mathfrak{M}_K(m,n),\ B \in \mathfrak{M}_K(n,r)$. Dann gilt:

$$L^n_m(A) \circ L^r_n(B) = L^r_m(AB).$$

Beweis

Nach der Definition des Matrixproduktes ist $AB \in \mathfrak{M}_K(m,r)$. Weiter gilt:

$$L(B)e^{(i)} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \dots \\ b_{m_i} \end{pmatrix} = B^i;\ L(A)B^i = AB^i = \begin{pmatrix} A_1 B^i \\ \dots \\ A_m B^i \end{pmatrix} = (AB)^i = (AB)e^{(i)},$$

also $(L(A) \circ L(B))e^{(i)} = L(AB)e^{(i)}$.

Bemerkung

Seien V, W zwei K-Vektorräume, $\dim V = n,\ \dim W = m,\ f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Weiter seien $\mathfrak{V} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathfrak{W} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W mit den zugehörigen *kanonischen Isomorphismen* $\Psi_{\mathfrak{V}} : \begin{matrix} V \to K^n \\ v_i \mapsto e^{(i)} \end{matrix}$ und $\Psi_{\mathfrak{W}} : \begin{matrix} W \to K^m \\ w_j \mapsto e^{(j)} \end{matrix}$. Dann *kommutiert* das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} v_i & \mathfrak{V} & V & \xrightarrow{f} & W & \mathfrak{W} & w_j \\ \downarrow & \Psi_{\mathfrak{V}} & \downarrow & & \downarrow & \Psi_{\mathfrak{W}} & \downarrow \\ e^{(i)} & \mathfrak{E}_n & K^n & \xrightarrow{L(A)} & K^m & \mathfrak{E}_m & e^{(j)} \end{array}$$

d.h. $L(A) = \Psi_{\mathfrak{W}} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1} \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ mit $A := M_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}}(f)$.

Die Matrix erhält man so:

$e^{(i)} \overset{\Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}}{\mapsto} v_i \overset{f}{\mapsto} f(v_i) = a_{1i}w_1 + ... + a_{mi}w_m \overset{\Psi_{\mathfrak{W}}}{\mapsto} a_{1i}e^{(1)} + ... + a_{mi}e^{(m)} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \cdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = A^{(i)},$ die i-te Spalte von A.

Beispiel

Gegeben seien die $\mathbb{R}$-Vektorräume $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$ mit Basen

$$\mathfrak{V} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ und } \mathfrak{W} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

sowie eine lineare Abbildung

$$\Psi : \begin{array}{ccc} V & \to & W \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 3y \\ y - 3x \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Gesucht ist die zugehörige Darstellungsmatrix $A := M_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}}(\Psi)$.

Nach obigem Diagramm ist

$$L_m^n(A) = \Psi_{\mathfrak{W}} \circ \Psi \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}.$$

Wir bezeichnen mit Mat $:= (L_m^n)^{-1}$ diejenige Abbildung, die jedem Homomorphismus die zugehörige Darstellungsmatrix bzgl. der kanonischen Basen zuordnet. Dann gilt:

$$A = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}} \circ \Psi \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}) = \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}})\mathrm{Mat}(\Psi)\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}).$$

Berechnen wir also diese Matrizen:

$$\mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Mat}(\Psi_{\mathfrak{W}}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Mat}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Unsere Darstellungsmatrix ist dann

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zweifache Anwendung

Sei V_i ein K-Vektorraum der Dimension n_i mit Basis $\mathfrak{V}_i,\ i = 1, 2, 3$. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 & \xrightarrow{g} & V_3 \\ \downarrow \ \Psi_{\mathfrak{V}_1} & & \downarrow \ \Psi_{\mathfrak{V}_2} & & \downarrow \ \Psi_{\mathfrak{V}_3} \\ K^{n_1} & \xrightarrow{L(B)} & K^{n_2} & \xrightarrow{L(A)} & K^{n_3} \end{array}$$

Also $f \circ g : V_1 \to V_3$ und $L(A) \circ L(B) = L(AB) = (\Psi_{\mathfrak{V}_3} \circ f \circ \Psi_{\mathfrak{V}_2}^{-1}) \circ (\Psi_{\mathfrak{V}_2} \circ g \circ \Psi_{\mathfrak{V}_1}^{-1}) = \Psi_{\mathfrak{V}_3} \circ (f \circ g) \circ \Psi_{\mathfrak{V}_1}^{-1}$ bzw. $AB = M_{\mathfrak{V}_3}^{\mathfrak{V}_1}(f \circ g)$.

Bemerkung

Nach Definition gilt für $\Psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ stets $\mathrm{Mat}(\Psi) = M_{\mathfrak{E}_m}^{\mathfrak{E}_n}(\Psi)$.

Bemerkung

Wir betrachten jetzt allgemeine, endlich dimensionale K-Vektorräume V, W, d.h. $V, W \notin \{K^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zwischen diesen lassen sich lineare Abbildungen im Allgemeinen nicht als Matrizen darstellen; da ein endlich dimensionaler K-Vektorraum aber stets isomorph zu einem K^n ist, können wir alle Rechnungen trotzdem mit Matrizen durchführen.

Beispiel

Betrachte $V = W = \mathbb{R}_d[X]$, den Unterraum $\{p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p) \leq d\}$ von $\mathbb{R}[X]$. $\mathbb{R}_d[X]$ hat Dimension $d+1$; wir statten ihn mit der Basis $\mathfrak{V} := (1, X, X^2, ..., X^d)$ aus.

Die *formale Derivation* $\Psi : \mathbb{R}_d[X] \to \mathbb{R}_d[X],\ \sum_{i=0}^d a_i T^i \mapsto \sum_{i=1}^d i a_i X^{i-1}$ (die der Ableitung der zugehörigen Polynomfunktion entspricht) ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraumhomomorphismus auf $\mathbb{R}[X]$, festgelegt durch die Werte auf der Basis: $\Psi(1) = 0,\ \Psi(X^i) = iX^{i-1}$.

Betrachten wir wieder das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{V} & \mathbb{R}_d[X] & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}_d[X] & \mathfrak{V} \\ \Psi_{\mathfrak{V}} & \downarrow & & \downarrow & \Psi_{\mathfrak{V}} \\ \mathfrak{E}_{d+1} & \mathbb{R}^{d+1} & \xrightarrow{L(A)} & \mathbb{R}^{d+1} & \mathfrak{E}_{d+1} \end{array}$$

Klar: $\Psi_{\mathfrak{V}} : (1, X, X^2, ..., X^d) \mapsto (e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, ..., e^{(d+1)})$, d.h. $\Psi_{\mathfrak{V}}(X^i) = e^{(i+1)}$ $(i = 0, ..., d)$, und für $i \neq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} L(A)(e^{(i)}) &= (\Psi_{\mathfrak{V}} \circ \Psi \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(i)}) \\ &= (\Psi_{\mathfrak{V}} \circ \Psi)(X^{i-1}) \\ &= \Psi_{\mathfrak{V}}((i-1)X^{i-2}) \\ &= (i-1)\Psi_{\mathfrak{V}}(X^{i-2}) \\ &= (i-1)e^{(i-1)} \end{aligned}$$

sowie im Fall $i = 1$

$$L(A)(e^{(1)}) = (\Psi_{\mathfrak{V}} \circ \Psi \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(1)}) = (\Psi_{\mathfrak{V}} \circ \Psi)(1) = \Psi_{\mathfrak{V}}(0) = 0.$$

Die Darstellungsmatrix A hat dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$