Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Basiswechsel

Seien V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basen $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$. Wir suchen die Matrix, die Koordinatenvektoren bzgl. $\mathfrak{V}$ in Kooedinatenvektoren bzgl. $\mathfrak{W}$ transformiert.

Wir benötigen dazu keine neue Theorie; statt dessen benutzen wir mit $\Psi = \mathrm{id}$ das bekannte Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} v_i & \mathfrak{V} & V & \xrightarrow{\Psi} & V & \mathfrak{W} & w_j \\ \downarrow & \Psi_{\mathfrak{V}} & \downarrow & & \downarrow & \Psi_{\mathfrak{W}} & \downarrow \\ e^{(i)} & \mathfrak{E}_n & K^n & \xrightarrow{L(A)} & K^n & \mathfrak{E}_n & e^{(j)} \end{array}$$

Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}} & W & \xrightarrow{\mathrm{id}} & V \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K^n & \xrightarrow{L(A)} & K^n & \xrightarrow{L(B)} & K^n \end{array}$$

Dann gilt: $A = M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}(\mathrm{id}),\ B = M^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})$ und $M^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}) M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}(\mathrm{id}) = M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, also $BA = I_n$.

Also: Die Matrix $M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}(\mathrm{id})$ des *Basiswechsels* von $\mathfrak{V}$ zu $\mathfrak{W}$ hat die inverse Matrix $M^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})$.

Beispiel

Sei $\mathfrak{V} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V. Da die Vektoren

$$\begin{array}{rcl} w_1 & := & -v_1 + 2v_3 \\ w_2 & := & -v_1 - v_2 + v_3 \qquad\qquad (*) \\ w_3 & := & -2v_1 + v_3 \end{array}$$

linear unabhängig sind, bildet $\mathfrak{W} := (w_1, w_2, w_3)$ eine weitere Basis von V. Wir suchen die Matrix $A := M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})$, die den Basiswechsel von $\mathfrak{V}$ nach $\mathfrak{W}$ beschreibt.

Zunächst lösen wir das System $(*)$ auf nach v_1, v_2, v_3 und erhalten so

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & \frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_3 \\ v_2 & = & \frac{1}{3}w_1 - w_2 + \frac{1}{3}w_3 \\ v_3 & = & -\frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_3 \end{array}$$

Es gilt wieder $L(A) = \Psi_{\mathfrak{W}} \circ \mathrm{id} \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1}$ und die Spalten von A sind gerade $L(A)(e^{(i)})$:

$$\begin{array}{rcl} L(A)(e^{(i)}) & = & (\Psi_{\mathfrak{W}} \circ \mathrm{id} \circ \Psi_{\mathfrak{V}}^{-1})(e^{(i)}) \\ & = & (\Psi_{\mathfrak{W}} \circ \mathrm{id})(v_i) \\ & = & \Psi_{\mathfrak{W}}(v_i) \end{array}$$

Also

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{\mathfrak{W}}(v_1) & = & \Psi_{\mathfrak{W}}\left(\frac{1}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_3\right) = \frac{1}{3}\Psi_{\mathfrak{W}}(w_1) - \frac{2}{3}\Psi_{\mathfrak{W}}(w_3) = \frac{1}{3}e^{(1)} - \frac{2}{3}e^{(3)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_2) & = & \Psi_{\mathfrak{W}}\left(-\frac{1}{3}w_1 - w_2 + \frac{1}{3}w_3\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Psi_{\mathfrak{W}}(v_3) & = & \Psi_{\mathfrak{W}}\left(-\frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_3\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Transformationsmatrix A ist also

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sei nun $v \in V$ mit zugehörigem Koordinatenvektor $\Psi_{\mathfrak{V}}(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Gesucht sind die Koordinaten des Vektors bzgl. $\mathfrak{W}$.

$$\Psi_{\mathfrak{W}}(v) = M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}(\mathrm{id})\Psi_{\mathfrak{V}}(v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt konkret $V = \mathbb{R}^3$ mit Basis $\mathfrak{V} := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Gesucht sind zu $v := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ die Koordinatenvektoren $\Psi_{\mathfrak{V}}(v)$ und $\Psi_{\mathfrak{W}}(v)$ bzgl. $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$.

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathfrak{V}}(v) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\Psi_{\mathfrak{W}}(v) &= M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}(\mathrm{id})\Psi_{\mathfrak{V}}(v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Darstellung linearer Abbildungen in verschiedenen Basen

Sei $f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ eine K-lineare Abbildung bzgl. der Basen $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ des K^n und $\mathfrak{V}', \mathfrak{W}'$ zwei weitere Basen des K^n. Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathfrak{V}' & & \mathfrak{V} & & \mathfrak{W} & & \mathfrak{W}' \\
V & \xrightarrow{\mathrm{id}} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\mathrm{id}} & W \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K^n & \xrightarrow{M^{\mathfrak{V}'}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id})} & K^n & \xrightarrow{M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}(\mathrm{id})} & K^m & \xrightarrow{M^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{W}'}(\mathrm{id})} & K^m
\end{array}$$

und es gilt: $M^{\mathfrak{V}'}_{\mathfrak{W}'}(f) = M^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{W}'}(\mathrm{id}_W)M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{W}}(f)M^{\mathfrak{V}'}_{\mathfrak{V}}(\mathrm{id}_V)$.

Korollar

Seien $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$ zwei Basen des n-dimensionalen K-Vektorraumes V mit Übergangsmatrix $P = M^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}'}(\mathrm{id})$. Ist dann $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung, so gilt: $M^{\mathfrak{V}'}_{\mathfrak{V}'}(f) = PM^{\mathfrak{V}}_{\mathfrak{V}}(f)P^{-1}$.