Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Lineare Gleichungssysteme

Definition

$(a_{ij})_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq n}$ heißt eine $m \times n$-*Matrix* mit *Komponenten* $a_{ij} \in K$.

Dabei bezeichnet i den *Zeilenindex* und j den *Spaltenindex*.

Betrachtet man die m Zeilen als n-Tupel $v_1, ..., v_m$, dann nennt man $\mathrm{span}(v_1, ..., v_m)$ den *Zeilenraum* der Matrix. Entsprechend bilden die n Spalten als m-Tupel den *Spaltenraum* der Matrix.

$\dim_K(\mathrm{span}(v_1, ..., v_n))$ heißt der *Zeilenrang* von (a_{ij}) und $\dim_K(\mathrm{span}(w_1, ..., w_m))$ der *Spaltenrang*.

Bemerkung

Der Zeilenraum von (a_{ij}) ändert sich nicht bei

(a) Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \neq 0$.
(b) Addieren eines λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile (wobei $i \neq j$).
(c) Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile.

Behauptung

Durch iterierte Anwendung von (a)-(c) kann man jede Matrix in eine „Stufenmatrix" der folgenden Gestalt überführen:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c|c|cc|c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \vdots \\ \leftarrow r \\ \end{array}$$

Beschreibung des Gauss-Algorithmus

(1) Suche erste Spalte j_1 mit einem $a_{ij_1} \neq 0$.
(2) Dividiere die i-te Zeile durch a_{ij_1}, vertausche sie mit der ersten Zeile und mache mit (b) alle anderen Komponenten der j_1-ten Spalte zu 0.
(3) Suche eine Spalte j_2 rechts von j_1 mit einem $a_{ij_2} \neq 0$ für $i \neq 1$.
(4) Dividiere die i-te Zeile durch a_{ij_2}, vertausche sie mit der zweiten Zeile und mache mit (b) alle anderen Komponenten der j_2-ten Spalte zu 0.
(5) Suche eine Spalte j_3 rechts von j_2 mit einem $a_{ij_3} \neq 0$ für $i \neq 1, 2$.
(6) u.s.w.

Behauptung

Die ersten r Zeilen der neuen Matrix sind linear unabhängig.

Beweis

Seien $w_i = (b_{i1}, ..., b_{in})$ die ersten r Zeilen der neuen Matrix, $i = 1, ..., r$. Dann

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_r w_r \\ &= (0, ..., 0, \underbrace{\alpha_1}_{j_1}, 0, ..., 0, \underbrace{\alpha_2}_{j_2}, 0, ..., \underbrace{\alpha_3}_{j_3}, ..., \underbrace{\alpha_r}_{j_r}, ...). \end{aligned}$$

Also $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$.

Folgerung

Die (neuen) ersten r Zeilen bilden eine Basis des Zeilenraums.

Definition

Seien K ein Körper, $a_{ij} \in K$, $X_1, ..., X_n$ Unbestimmte. Das System

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & ... & + & a_{1n}X_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}X_1 & + & ... & + & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array}$$

heißt ein *homogenes (lineares) Gleichungssystem* (über K) in den Unbestimmten $X_1, ..., X_n$.

Die zugehörige *Koeffizientenmatrix* ist

$$(a_{ij})_{1\le i\le m}^{1\le j\le n} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Beispiele

(1)
$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

(2) $x_1 + 2x_2 = 0$ hat als Lösungsmenge alle Vektoren $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \perp (1, 2)$. Diese ist gerade $\mathbb{R}(2, -1)$.

(3)
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

hat als Lösungsmenge $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x \perp (1, 2, 0) \text{ und } x \perp (1, 2, 1)\}$.

Satz

Die Lösungsmenge von $(*)$ ist gerade $\{(x_1, ..., x_n) \in K^n \mid (x_1, ..., x_n) \perp (a_{i1}, ..., a_{in}) \text{ für } i = 1, ..., m\}$.

Beweis

$$x \text{ löst } (*) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & ... & + & a_{1n}X_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}X_1 & + & ... & + & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff A^{(i)}x = 0 \text{ für jede Zeile } A^{(i)}$$
$$\iff A^{(i)} \perp x \text{ für jede Zeile } A^{(i)}.$$

Definition

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir

$$(a_1, ..., a_n) \circ (b_1, ..., b_n) := a_1b_1 + ... + a_nb_n.$$

Wir schreiben $a \perp b$ für $a \circ b = 0$.

Für $M \subseteq K^n$ setzen wir $M^\perp := \{x \in K^n \mid x \perp a \text{ für alle } a \in M\}$.

Bemerkung

(1) Für $K = \mathbb{R}$ ist $\circ$ das euklidische Skalarprodukt.

(2) Für $K = \mathbb{C}$ ist $\circ$ nicht das Hermitesche Skalarprodukt, denn z.B. ist
$(1, i) \cdot (1, i) = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 2 \neq 0 = 1 \cdot 1 + i \cdot i = (1, i) \circ (1, i)$.

Behauptung

Für $\circ$ gelten folgende Rechenregeln:

(1) $a \circ b = b \circ a$.
(2) $(\alpha a + \alpha' a') \circ b = \alpha(a \circ b) + \alpha'(a' \circ b)$.
(3) $a \perp b \Rightarrow \alpha a \perp \beta b$.

Beweis

(1) $a \circ b = (a_1, ..., a_n) \circ (b_1, ..., b_n) = a_1 b_1 + ... + a_n b_n = b_1 a_1 + ... + b_n a_n = (b_1, ..., b_n) \circ (a_1, ..., a_n) = b \circ a$.

(2) $(\alpha a + \alpha' a') \circ b = \alpha(a \circ b) = (\alpha a_1 + \alpha' a'_1 + ... + \alpha a_n + \alpha' a'_n) \circ (b_1, ..., b_n) = \alpha a_1 b_1 + \alpha' a'_1 b_1 + ... + \alpha a_n b_n + \alpha' a'_n b_n = \alpha(a_1 b_1 + ... + a_n b_n) + \alpha'(a'_1 b_1 + ... + a'_n b_n) = \alpha(a_1, ..., a_n) \circ b + \alpha'(a'_1, ..., a'_n) \circ b = \alpha(a \circ b) + \alpha'(a' \circ b)$.

(3) $a \perp b \Rightarrow a \circ b = 0 \Rightarrow (\alpha a) \circ (\beta b) = \alpha(a \circ (\beta b)) = \alpha((\beta b) \circ a) = \alpha\beta(b \circ a) = \alpha\beta(a \circ b) = \alpha\beta 0 = 0 \Rightarrow (\alpha a) \perp (\beta b)$.

Lemma

Für $M \subseteq K^n$ ist $M^\perp$ ein Untervektorraum des K^n und $M^\perp = (\operatorname{span}(M))^\perp$.

Beweis

Seien $x, y \in M^\perp,\ \alpha \in K$. Dann gilt:

(1) $0 \circ a = 0 \Rightarrow 0 \perp a$ für alle $a \in M$, also $0 \in M^\perp$.
(2) $(x \circ a = 0$ und $y \circ a = 0) \Rightarrow x \circ a + y \circ a = (x + y) \circ a = 0 \Rightarrow x + y \in M^\perp$.
(3) $x \circ a = 0 \Rightarrow (\alpha x) \circ a = 0 \Rightarrow \alpha x \in M^\perp$.

Also ist $M^\perp$ ein Untervektorraum des K^n.

Weiter gilt: $M \subseteq \operatorname{span}(M) \Rightarrow M^\perp \supseteq (\operatorname{span}(M))^\perp$ und umgekehrt $x \circ a = 0$ für alle $a \in M \Rightarrow x \circ (\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m) = 0$ für alle $a_1, ..., a_m \in M, \alpha_1, ..., \alpha_m \in K \Rightarrow M^\perp \subseteq)(\operatorname{span}(M))^\perp$.

Folgerung

Bezeichne M den Zeilenraum von (a_{ij}). Dann ist der Vektorraum $M^\perp$ gerade die Lösungsmenge von $(*)$. $M^\perp$ wir der *Lösungsraum* von $(*)$ genannt.

Bestimmung einer Basis des Lösungsraums von $(*)$

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & ... & + & a_{1n}X_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}X_1 & + & ... & + & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array}$$

mit zugehöriger Koeffizientenmatrix

$$(a_{ij}) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen (a)-(c) wird (a_{ij}) auf Stufenform transformiert:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c|c|cc|c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \underbrace{0}_{k_1} & \underbrace{0}_{k_2} & \underbrace{0}_{j_1} & \underbrace{0}_{j_2} & \underbrace{0}_{k_3} & \underbrace{0}_{k_4} & \underbrace{0}_{j_3} & \cdots & \underbrace{0}_{j_r} & \underbrace{0}_{k_{n-r}} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \ \ \vdots \\ \leftarrow r \\ \\ \end{array} =: (a'_{ij}),$$

d.h. $\{1,...,n\} = \{j_1,...,j_r\} \cup \{k_1,...,k_{n-r}\}$.

Dann hat das zu (a'_{ij}) gehörige Gleichungssystem

$$(**)\quad \begin{array}{ccccccccccc} X_{j_1} & & & + & a'_{1k_1}X_{k_1} & + & \cdots & + & a'_{1k_{n-r}}X_{k_{n-r}} & = & 0 \\ & X_{j_1} & & + & a'_{2k_1}X_{k_1} & + & \cdots & + & a'_{2k_{n-r}}X_{k_{n-r}} & = & 0 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ & & X_{j_r} & + & a'_{rk_1}X_{k_1} & + & \cdots & + & a'_{rk_{n-r}}X_{k_{n-r}} & = & 0 \end{array}$$

den gleichen Lösungsraum wie $(*)$.

Spezielle Lösungen $(x_1,...,x_n) \in K^n$ von $(**)$ sind dann:

$$\left.\begin{array}{cccccc} (1) & x_{k_1} & = & 1, & x_{j_l} = & -a'_{lk_1} \\ (2) & x_{k_2} & = & 1, & x_{j_l} = & -a'_{lk_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ (n-r) & x_{k_{n-r}} & = & 1, & x_{j_l} = & -a'_{lk_{n-r}} \end{array}\right\} \text{ für } 1 \le l \le r,\ x_i = 0 \text{ sonst.}$$

Wir bezeichnen diese Lösungen mit $c^{(1)},...,c^{(n-r)}$, d.h. es gilt:

$$c^{(i)} := (c_1^{(i)},...,c_n^{(i)}) \text{ mit } c_{k_i}^{(i)} = 1,\ c_{j_l}^{(i)} = -a'_{lk_i} \text{ für } 1 \le l \le r \text{ und } c_{k_s}^{(i)} = 0 \text{ für } s \ne i.$$

Lemma

$(c^{(1)},...,c^{(n-r)})$ ist eine Basis des Lösungsraums von $(*)$ bzw. $(**)$.

Beweis

(1) Lineare Unabhängigkeit:
$(0,...,0) = (\alpha_1 c^{(1)} + ... + \alpha_{n-r}c^{(n-r)}) = (..., \underbrace{\alpha_1}_{k_1}, ..., \underbrace{\alpha_{n-r}}_{k_{n-r}}, ...) \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_{n-r} = 0.$

(2) Erzeugendensystem:
Sei $b = (b_1,...,b_n)$ eine beliebige Lösung von $(*)$. Dann ist auch $x = (x_1,...,x_n) := b - b_{k1}c^{(1)} - ... - b_{k,n-r}c^{n-r}$ eine Lösung von $(*)$, also $x_{k_i} = 0$ für alle k_i.
Da x auch $(**)$ löst, sind auch alle $x_{j_l} = 0$, d.h. $x = 0$. Also $b = b_{k_1}c^{(1)} + ... + b_{k,n-r}c^{n-r}$.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -9 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -0,5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0}_{k_1} & \underbrace{0}_{j_1} & \underbrace{0}_{j_2} & \underbrace{0}_{k_2} & \underbrace{0}_{k_3} & \underbrace{0}_{j_3} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccllllll} & & k_1 & & & k_2 & k_3 & \\ c^{(1)} & = & (1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0) \\ c^{(2)} & = & (0, & -5, & 1, & 1, & 0, & 0) \\ c^{(3)} & = & (0, & 10, & -3, & 0, & 1, & 0) \end{array}$$

Beispiel

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & & - & x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & (5/2)x_3 & + & 4x_4 & - & 2x_5 & + & 2x_6 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \end{array}$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & (5/2) & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -(9/2) & -8 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -(3/2) & -(1/2) & -2 \\ 0 & 0 & -(9/2) & -8 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (25/9) & (5/9) & (35/9) \\ 0 & 1 & 0 & -(3/2) & -(1/2) & -2 \\ 0 & 0 & 1 & (16/9) & -(4/9) & (8/9) \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -(5/6) & (10/9) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (1/4) & -(1/2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -(4/3) & -(8/9) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (1/2) & 1 \end{pmatrix}
$$

Spezielle Lösungen sind

$$
c^{(1)} = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \qquad \text{und} \qquad c^{(2)} = \left(-\frac{10}{9}, \frac{1}{2}, \frac{8}{9}, -1, 0, 1\right)
$$

Satz

Ein homogenes Gleichungssystem $(*)$ in n Unbestimmten besitzt genau dann nur die *triviale Lösung* $(x_1 = 0, ..., x_n = 0)$, wenn der Spaltenrang der zugehörigen Koeffizientenmatrix n beträgt.

Beweis

$(*)$ ist genau dann nur trivial lösbar, wenn der Lösungsraum von $(*)$ der Nullraum ist. Da die einzige Basis des Nullraums die leere Menge ist, kann es keine Lösungen der Gestalt $c^{(i)}$ geben, d.h. $n = r$.

Lemma

Für jeden Untervektorraum des K^n gilt:

(1) $\dim U + \dim U^\perp = n$.
(2) $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis

(1) Sei $U = \operatorname{span}(v_1, ..., v_m)$ mit $v_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$. Dann gilt:
$\dim U^\perp = n-$ Zeilenrang von $(a_{ij}) = n - \dim \operatorname{span}(v_1, ..., v_m) = n - \dim U$.

(2) $u \in U \Rightarrow u \perp v$ für alle $v \in U^\perp \Rightarrow u \in (U^\perp)^\perp \Rightarrow U \subseteq (U^\perp)^\perp$.
Wegen $\dim U + \dim U^\perp = n$ und $\dim U^\perp + \dim(U^\perp)^\perp = n$ folgt $\dim U = \dim(U^\perp)^\perp$.
Also $(U^\perp)^\perp = U$.

Definition

Sei U ein Untervektorraum von V. Für $v \in V$ heißt $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ der *um v verschobene (affine) Unterraum*.

Bemerkung

Also ist $v + U$ genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $v \in U$.

Definition

Seien K ein Körper, $a_{ij}, b_i \in K,\ X_1, ..., X_n$ Unbestimmte. Das System

$$(+)\quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & ... & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}X_1 & + & ... & + & a_{mn}X_n & = & b_m \end{array}$$

heißt ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* (über K) in den Unbestimmten $X_1, ..., X_n$ mit *einfacher Koeffizientenmatrix*

$$(a_{ij}) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

und *erweiterter Koeffizientenmatrix*

$$(a_{ij}|b_i) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Das System

$$(*)\quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & ... & + & a_{1n}X_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}X_1 & + & ... & + & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array}$$

heißt das *zugehörige homogene System.*

Bemerkung

Sei $A = (a_{ij})$ die einfache Matrix von $(+)$. $A^{(i)}$ bezeichne die i-te Zeile von A und $X = (X_1, ..., X_n)$. dann besagt $(+)$ gerade: $A_1 \circ X = b_1, ..., A_m \circ X = b_m$.

Lemma

Bezeichne M den Lösungsraum von $(*)$. Sei x' eine spezielle Lösung von $(+)$. Dann ist der Lösungsraum von $(+)$ gerade der affine Raum $x' + M$.

Beweis

$$\begin{array}{rl} x \in K^n \text{ löst } (+) & \Leftrightarrow\ A_1 \circ x = b_1, ..., A_m \circ x = b_m \\ & \Leftrightarrow\ A_1 \circ x = A_1 \circ x', ..., A_m \circ x = A_m \circ x' \\ & \Leftrightarrow\ A_1 \circ (x - x') = 0, ..., A_m \circ (x - x') = 0 \\ & \Leftrightarrow\ x - x' \in M \\ & \Leftrightarrow\ x \in x' + M. \end{array}$$

Satz

Bezeichne $(A^{(i)}, b_i)$ die i-te Zeile der erweiterten Matrix $(a_{ij}|b_i)$ und $(X, X_{n+1}) = (X_1, ..., X_n, X_{n+1})$. Betrachte das homogene System

$$(++)\ (A_1, b_1) \circ (X, X_{n+1}) = 0, ..., (A_m, b_m) \circ (X, X_{n+1}) = 0.$$

Dann gilt: $x = (x_1, ..., x_n)$ löst $(+) \Leftrightarrow (x, -1)$ löst $(++)$.

Beweis

$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + b_i(-1) = 0.$

Bemerkung

Wir betrachten die erweiterte Matrix $(a_{ij}|b_i)$. Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc||c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\
 & & & 0 & & & & 0 & * & \cdots & * & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & & & & 0 & * & \cdots & * & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * & 1 & * & \cdots & * & b'_r \\
 & & & 0 & & & & 0 & & & & b'_{r+1} \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots \\
 & & & \underbrace{0}_{j_1} & & & & \underbrace{0}_{j_r} & & & & b'_m
\end{array}\right) =: (a'_{ij}|b'_i).$$

> **Satz**
>
> $(+)$ ist genau dann lösbar, wenn $b'_{r+1} = 0, ..., b'_m = 0$.
>
> Eine spezielle Lösung ist dann $x' = (0, ..., 0, b'_1, 0, ..., 0, b'_r, 0, ..., 0)$.

Beweis

$\Leftarrow$: Seien $b'_{r+1}, ..., b'_m = 0$. Dann löst $x'' := (x', -1)$ das homogene System $(++)'$, denn

$$\begin{array}{rcl}
0? + ... + 0? + b'_1 1 + 0? + ... + 0? + b'_2 0 + 0? + ... + ... + 0? + b'_r 0 + 0? + ... + 0? - b'_1 & = & 0 \\
0? + ... + 0? + b'_1 0 + 0? + ... + 0? + b'_2 1 + 0? + ... + ... + 0? + b'_r 0 + 0? + ... + 0? - b'_2 & = & 0 \\
 & \vdots & \\
0? + ... + 0? + b'_1 0 + 0? + ... + 0? + b'_2 0 + 0? + ... + ... + 0? + b'_r 1 + 0? + ... + 0? - b'_3 & = & 0.
\end{array}$$

Also löst x' das System $(+)'$ und damit auch $(+)$.

$\Rightarrow$: Sei etwa $b'_{r+1} \neq 0$. Wir multiplizieren die $(r+1)$-te Zeile mit $(b'_{r+1})^{-1}$ und erreichen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc||c}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\
 & & & 0 & & & & 0 & * & \cdots & * & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & & & & 0 & * & \cdots & * & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * & 1 & * & \cdots & * & b'_r \\
 & & & 0 & & & & 0 & & & & 1 \\
 & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 & & \vdots \\
 & & & 0 & & & & 0 & & & & b'_m
\end{array}\right).$$

Also fordert die $(r+1)$-te Zeile des zugehörigen inhomogenen Gleichungssystems:

$$0 = 0X_1 + 0X_2 + ... + 0X_n = 1,$$

Widerspruch.

> **Satz**
>
> Das inhomogene lineare Gleichungssystem $(+)$ ist genau dann lösbar, wenn der Zeilenrang von (a_{ij}) mit dem Zeilenrang von $(a_{ij}|b_i)$ übereinstimmt.

Beweis

Wir zeigen: $b'_{r+1} = 0, ..., b'_m = 0 \Leftrightarrow \text{Zeilenrang}(a_{ij}) = \text{Zeilenrang}(a_{ij}|b_i)$.

$\Rightarrow$: Klar.

$\Leftarrow$: Sei (etwa) $b'_{r+1} \neq 0 \Rightarrow \text{Zeilenrang}(a_{ij}|b_i) = r + 1 > r = \text{Zeilenrang}(a_{ij})$.

Definition

(+) heißt *universell lösbar*, falls (+) bei jeder Wahl der b_i lösbar ist.

(+) heißt *eindeutig lösbar*, falls (+) zu jeder Wahl der b_i höchstens eine Lösung hat.

Bemerkung

Beachte also: Ein System, das für gar keine Wahl der b_i lösbar ist, wird auch eindeutig lösbar genannt.

Satz

(+) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn der Spaltenrang von (a_{ij}) gleich der Spaltenzahl n ist.

(+) ist genau dann universell lösbar, wenn der Zeilenrang von (a_{ij}) gleich der Zeilenzahl m ist.

Beweis

Eindeutiger Fall:
Für $b_1, ..., b_m \in K$ beliebig gilt: Spaltenrang$(a_{ij}) = n \Leftrightarrow (*)$ ist nur trivial lösbar. Also ist die Lösungsmenge von (+) entweder $x' + \{0\} = x'$ oder $\emptyset$.

Universeller Fall:
$\Leftarrow$: Zeilenrang$(a_{ij}) = r =$ Zeilenzahl $= m \Rightarrow$ Zeilenrang$(a_{ij}|b_i) = r =$ Zeilenrang(a_{ij}).

$\Rightarrow$: Sei der Zeilenrang r von (a_{ij}) kleiner als die Zeilenzahl m. Wir bezeichnen die r linear unabhängigen Zeilen von (a_{ij}) mit $A^{(i_1)}, ..., A^{(i_r)}$. Wähle $i_0 \in \{1, ..., m\} \setminus \{i_1, ..., i_r\}$ und setze $b_i := \{\begin{smallmatrix} 1, & i=i_0 \\ 0, & i \neq i_0 \end{smallmatrix}$. Dann $(A^{(i_0)}, 1) \notin \operatorname{span}((A^{(i_1)}, 0), ..., (A^{i_r}, 0))$, d.h. der Zeilenrang$(a_{ij}|b_i) > r =$ Zeilenrang(a_{ij}), also ist (+) nicht lösbar.