Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Einführung in die Determinantentheorie

Definition

Seien $(a) \in \mathfrak{M}_K(1,1)$ und $A = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_K(2,2)$. Dann definieren wir

$$\det_1(a) := a \text{ und } \det_2(A) := be - cd.$$

Behauptung

(1) $\det_2 \begin{pmatrix} \alpha a' + \beta a'' & \alpha b' + \beta b'' \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \det_2 \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \det_2 \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c & d \end{pmatrix}$.

(2) $\det_2 \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 0$.

(3) $\det_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$.

Beweis

(1) $$\begin{aligned}\det_2 \begin{pmatrix} \alpha a' + \beta a'' & \alpha b' + \beta b'' \\ c & d \end{pmatrix} &= (\alpha a' + \beta a'')d - (\alpha b' + \beta b'')c = \alpha a'd + \beta a''d - \alpha b'c - \beta b''c \\ &= \alpha(a'd - b'c) + \beta(a''d - b''c) = \alpha \det_2 \begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \det_2 \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c & d \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) $\det_2 \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ba = 0$.

(3) $\det_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

Definition

Sei $A \in \mathfrak{M}_K(n,n)$ mit Zeilen $A_1, ..., A_n$. Eine Abbildung $\det_n : \mathfrak{M}_K(n,n) \to K$ heißt *Determinantenabbildung*, falls für alle $A, A', A'' \in \mathfrak{M}_K(n,n)$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gilt:

(1) $\det_n$ ist linear in jeder Zeile, d.h.

$$\det_n \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ \alpha A_i' + \beta A_i'' \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \alpha \det_n \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i' \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \beta \det_n \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i'' \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

(2) $\det_n$ ist alternierend, d.h. gibt es i, j verschieden mit $A_i = A_j$, so gilt $\det_n(A) = 0$.

(3) $\det_n$ ist normiert, d.h. $\det_n(I_n) = 1$.

Notation

Wir schreiben manchmal auch nur det statt $\det_n$.

Lemma

Für $\det : \mathfrak{M}_K(n,n) \to K$ gilt weiter:

(4) $\det(A)$ ändert sich nicht, wenn zu einer beliebigen Zeile A_i ein Vielfaches αA_j einer anderen Zeile addiert wird.

(5) $\det(A)$ ändert sein Vorzeichen, wenn zwei Zeilen von A vertauscht werden.

Beweis

(4)

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i+\alpha A_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}+\alpha\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}=\det(A).$$

(5)

$$0=\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i+A_j\\ \vdots\\ A_i+A_j\\ \vdots\end{pmatrix}=\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix}+\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0}\Longrightarrow\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}\vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

Hauptsatz der Determinantentheorie

Es gibt genau eine Abbildung $\det : \mathfrak{M}_K(n,n)\to K$, die (1)-(3) erfüllt.

Beweisskizze

(1) Existenz:

Wir führen eine Induktion über n. Der Induktionsanfang $n=1$ ist klar; den Fall $n=2$ haben wir bereits gezeigt. Sei nun also $n>2$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Abbildung $\det_{n-1} : \mathfrak{M}_K(n-1,n-1)\to K$, für die (1)-(5) gilt. Wir definieren

$$\det_n(A):=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{k1}\det_{n-1}A_{k1}$$

für $A=(a_{ij})\in\mathfrak{M}_K(n,n)$ und müssen zeigen: $\det_n$ erfüllt (1)-(3).

(2) Eindeutigkeit:

Sei $d:\mathfrak{M}_K(n,n)\to K$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (1)-(5). Zu zeigen ist, dass dann bereits $d=\det_n$ gilt. Wir führen dazu wieder eine Induktion über n.

Bemerkung

Für $A\in\mathfrak{M}_K(n,n)$ wird $\det_n(A)$ als die *Determinante* von A bezeichnet.

Korollar (Entwicklungsformeln nach Laplace)

(1) Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det_n(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det_{n-1}A_{ij};$$

(2) Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det_n(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det_{n-1}(A_{ij}).$$

Korollar

Für $A\in\mathfrak{M}_K(n,n)$ gilt: $\det_n(A)=\det_n(A^T)$.

Beweis

Per Induktion über n. Der Fall $n=1$ ist trivial. Gelte die Behauptung also für $n-1$. Dann folgt:

$$\det_n(A) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}a_{1l}\det_{n-1}A_{1l} = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}a_{1l}\det_{n-1}(A_{1l})^T = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}a_{1l}\det_{n-1}(A^T)_{l1} = \det_n(A^T).$$

Beachte dabei: Mit $A^T = (a'_{ij})$ gilt $a'_{l1} = a_{1l}$.

Regel von Sarus

$$\det_3\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = (ab'c'' + a'b''c + a''bc') - (ab''c' + a'bc'' + a''b'c).$$

Beweis

Durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \det_3\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} &= a\det_2\begin{pmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{pmatrix} - a'\det_2\begin{pmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{pmatrix} + a''\begin{pmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{pmatrix} \\ &= a(b'c'' - b''c') - a'(bc'' - b''c) + a''(bc' - b'c) \\ &= (ab'c'' + a'b''c + a''bc') - (ab''c' + a'bc'' + a''b'c). \end{aligned}$$

Satz

Für $A \in \mathfrak{M}_K(n,n)$ gilt: $\det_n(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar.

Beweis

$\Rightarrow$: Sei A nicht invertierbar, d.h. es gibt ein i mit $A_i = \sum_{l\neq i}\alpha_l A_l$ $(\alpha \in K)$.

Addiert man zur i-ten Zeile das $-\alpha_l$-fache der l-ten Zeile für alle $l \neq i$, so ist die i-te Zeile der entstehenden Matrix B die Nullzeile. Entwickelt man die Determinante von B nach der i-ten Zeile, so folgt $0 = \det_n(B) = \det_n(A)$.

$\Leftarrow$: Per Induktion über n. Der Fall $n=1$ ist klar. Gelte „$\Leftarrow$" also für $n-1$. Angenommen, $\det_n(A)$ wäre 0. Dann

$$0 = \det_n\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{1j}\det_{n-1}A_{1j}.$$

Weiter gilt für $i \geq 2$:

$$0 = \det_n\begin{pmatrix} A_i \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{ij}\det_{n-1}A_{1j}.$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\det_{n-1}A_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{nj}\det_{n-1}A_{1j} = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{((-1)^{j-1}\det_{n-1}A_{1j})}_{=:\alpha_j}A^{(j)} = \sum_{j=1}^{n}0 = 0,$$

d.h. alle $\alpha_j A^{(j)}$ betragen 0.

Da nach Voraussetzung A invertierbar ist, gilt $\mathrm{rg}(A) = n$, d.h. alle $\alpha_j = 0$ und damit alle $\det_{n-1}(A_{1j}) = 0$. Andererseits folgt aus $\mathrm{rg}(A) = n$ auch, dass $\mathrm{rg}(A_2,\ldots,A_n)^T = n-1$, d.h. es gibt $n-1$ linear unabhängige Spalten von $(A_2,\ldots,A_n)^T$ und damit auch eine invertierbare Teilmatrix A_{1j}. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\det_{n-1}(A_{1j}) \neq 0$, Widerspruch.

Korollar

Für $A \in \mathfrak{M}_K(n,n)$ gilt: $\det(A)\det(B) = \det(AB)$.

Beweis

Der Fall $\det(B) = 0$ ist klar, denn wäre $\det(AB) \neq 0$, d.h. AB invertierbar, dann gäbe es ein $C \in \mathfrak{M}_K(n,n)$ mit $I_n = C(AB) = (CA)B$, d.h. entgegen der Annahme wäre auch B invertierbar.

Gelte also jetzt $\det(B) \neq 0$. Wir definieren die Abbildung

$$d : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_K(n,n) & \to & K \\ A & \mapsto & \frac{\det(AB)}{\det(B)} \end{array}$$

Diese erfüllt (1)-(3), denn:

(1) Wegen

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i' + \beta A_i'' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ \alpha A_i' B + \beta A_i'' B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix}$$

ist $\det(AB)$ linear in der i-ten Zeile von A und damit auch $d(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}$.

(2) d ist alternierend, denn

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_i B \\ \vdots \\ A_j B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix},$$

also $\det(AB) = 0$, falls $i \neq j$.

(3) $d(I_n) = \frac{\det(I_n B)}{\det(B)} = \frac{\det(B)}{\det(B)} = 1$, d.h. d ist normiert.

Mit der Eindeutigkeit der Determinantenabbildung folgt: $d = \det$, also

$$\det(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)} \Longleftrightarrow \det(A)\det(B) = \det(AB).$$

Bemerkung

(1) Die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen bildet eine Gruppe, die wir mit $GL(n,K)$ bezichnen.

(2) $\det : GL(n,K) \to (K^\times, \cdot)$ ist ein *Gruppenhomomorphismus*, d.h. es gilt: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(3) $(\det(A))^{-1} = \det(A^{-1})$, denn:

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}.$$

(4) Seien $A, B \in \mathfrak{M}_K(n,n)$. Dann gilt $A \approx B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$, denn:

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow \det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(P)(\det(P))^{-1}\det(B) = \det(B).$$

Lemma

Seien $A \in \mathfrak{M}_K(n,n)$ und $B \in \mathfrak{M}_K(m,m)$. Dann gilt:

$$\det_{n+m}\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det_n(A)\det_m(B).$$

Beweis

Wir führen eine Induktion über n.

Zum Induktionsanfang: Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$\det_{m+1}\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = (-1)^0 a \det_m(B) = \det_1(a)\det_m(B).$$

Zum Induktionsschritt: Gelte die Behauptung für $n-1$. Dann

$$\begin{aligned}\det_{n+m}\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i1} \det_{n+m-1}\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}_{i1} &&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i1} \det_{n-1} A_{i1} \det_m(B) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \det_{n-1}(A_{i1})\right)\det_m(B) &&= \det_n(A)\det_m(B).\end{aligned}$$

Korollar

$$\det_n \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i.$$

Beweis

Induktives Anwenden des Lemmas.

Cramers Regel

Sei $A \in \mathfrak{M}_K(n,n)$ mit Zeilen A_i und Spalten $A^{(j)}$. Ist $\det(A) \neq 0$, so besitzt das LGS

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & ... & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}X_1 & + & ... & + & a_{nn}X_n & = & b_n \end{array}$$

genau eine Lösung, nämlich

$$X_l = \frac{\det(A^{(1)}...A^{(l-1)}BA^{(l+1)}...A^{(n)})}{\det(A)},$$

wobei $B = (b_1, ..., b_n)^T$.

Beweis

Sei $(x_1, ..., x_n)$ eine Lösung des LGS, dann $x_1A^{(1)} + ... + x_nA^{(n)} = B$. Wegen der Linearität in der l-ten Spalte gilt dann:

$$\begin{aligned} & \det(A^{(1)}...A^{(l-1)}|B|A^{(l+1)}...A^{(n)}) \\ = \; & x_1 \det(A^{(1)}...|A^{(1)}|...A^{(n)}) + ... + x_l \det(A^{(1)}...|A^{(l)}|...A^{(n)}) + ... + x_n \det(A^{(1)}...|A^{(n)}|...A^{(n)}) \\ = \; & x_l \det(A) \\ \Rightarrow x_l = \; & \frac{\det(A^{(1)}...|B|...A^{(n)})}{\det(A)}. \end{aligned}$$

Berechnung der inversen Matrix

Sei $A \in GL(n,K)$. Wir suchen $X \in GL(n,K)$ mit $AX = I_n$. Sei $X^{(j)} = (x_{1j}...x_{nj})^T$, dann gilt:

$$A_k X^{(j)} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit der Cramerschen Regel folgt:

$$x_{ij} = \frac{\det(A^{(1)}...A^{(i-1)}e^{(j)}A^{(i+1)}...A^{(n)})}{\det(A)}.$$

Es gilt also:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}((-1)^{i+j}\det(A_{ij}))_{1\leq j\leq n}^{1\leq i\leq n},$$

denn mit Entwicklung nach der i-ten Spalte ist $\det(A^{(1)}...|e^{(j)}|...A^{(n)}) = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Lemma

Sei K Körper, $e^{(i)} := (0\ ...\ 0\ 1\ 0\ ...\ 0) \in K^n$. Es gilt für alle $\sigma \in S_n$:

$$\det_n \begin{pmatrix} e^{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e^{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}\sigma$$

Beweis

Schreibe $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k := \tau_1 \circ \sigma_1$ als Komposition von Transpositionen.

$$\det_n \begin{pmatrix} e^{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e^{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \det_n \begin{pmatrix} e^{\tau_1\circ\sigma_1(1)} \\ \vdots \\ e^{\tau_1\circ\sigma_1(n)} \end{pmatrix} = (-1)\ \det_n \begin{pmatrix} e^{\sigma_1(1)} \\ \vdots \\ e^{\sigma_1(n)} \end{pmatrix} = ... = (-1)^k\ \det_n \begin{pmatrix} e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(n)} \end{pmatrix} = (-1)^k = \operatorname{sgn}\sigma.$$

Satz (Entwicklungsformel nach Leibniz)

Für eine Matrix $A \in M_K(n,n)$ mit den Zeilen $A_i := (a_{i1}...a_{in})$ gilt:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \operatorname{sgn}\sigma.$$

Beweis

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \det \begin{pmatrix} e^{(j_1)} \\ A_2 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = ... = \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} a_{ij_i} \det \begin{pmatrix} e^{(j_1)} \\ e^{(j_2)} \\ \vdots \\ e^{(j_n)} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \operatorname{sgn}\sigma.$$