Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Eigenwerttheorie

Motivation

Gegeben seien ein K-Vektorraum V der Dimension $n < \infty$ und eine K-lineare Abbildung $f : V \to V$.

Wir suchen eine Basis $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ von V, so dass $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ eine „Normalform" hat (damit klassifizieren wir Endomorphismen).

Beispiel

Wir betrachten eine Streckung, etwa f, gegeben durch $f(e^{(1)}) = 3e^{(1)}$ und $f(e^{(2)}) = e^{(2)}$. Dann ist $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Darstellungsmatrix von f. Diese hat „Diagonalgestalt".

Allgemein: Habe $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ *Diagonalgestalt*, d.h. $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{Dann gilt: } f(v_i) = \lambda_i v_i.}$

Ist $\lambda_i = 0$, dann auch $f(v_i) = 0$, d.h. die Gerade Kv_i wird auf den Nullpunkt abgebildet.

Für $\lambda_i \neq 0$ gilt $f(Kv_i) = \lambda_i K v_i = Kv_i$, d.h. die Gerade wird durch f in sich selbst überführt.

Definition

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung.

$\lambda \in K$ heißt *Eigenwert (Streckungsfaktor)* von f, wenn es ein $v \in V \backslash \{0\}$ gibt mit $f(v) = \lambda v$.

v heißt dann der zu λ gehörige *Eigenvektor*.

Beachte

0 ist niemals ein Eigenvektor, kann aber ein Eigenwert sein.

Bemerkung

$\boxed{M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) \text{ hat Diagonalgestalt} \Leftrightarrow \mathfrak{V} \text{ ist eine Basis aus Eigenvektoren.}}$

Lemma

Seind $v_1, ..., v_m$ Eigenvektoren von f mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$, dann sind $v_1, ..., v_m$ K-linear unabhängig.

Beweis

Induktion über m:

Der Fall $m = 1$ ist klar, da $v_1 \neq 0$.

Gelte die Behauptung für $m - 1$ und sei $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$ mit $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$. Wir müssen zeigen, dass alle $\alpha_i = 0$.

Wegen

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_m \alpha_1 v_1 + ... + \lambda_m \alpha_m v_m \text{ und} \\ 0 &= f(0) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_m \lambda_m v_m \end{aligned}$$

und der Induktionsvoraussetzung ist

$$0 = \alpha_1 \underbrace{(\lambda_m - \lambda_1)}_{\neq 0} v_1 + ... + \alpha_{m-1} \underbrace{(\lambda_m - \lambda_{m-1})}_{\neq 0} v_{m-1} \overset{IV}{\Longrightarrow} \alpha_1 = ... = \alpha_{m-1} = 0.$$

Also $0 = \alpha_m v_m$ mit $v_m \neq 0$, d.h. $\alpha_m = 0$.

Beispiel

Wir betrachten eine Drehung mit Drehwinkel θ um den Ursprung. Sei etwa $f(e^{(1)}) = \binom{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ und $f(e^{(2)}) = \binom{\cos(\theta + 0,5\pi)}{\sin(\theta + 0,5\pi)}$. Dann $M(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (benutze dabei $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$).

f ist injektiv, denn $\det_2(M(f)) = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \neq 0$.

Falls $\theta \neq n\pi$, dann gibt es keine Gerade, die in sich selbst überführt wird.

Lemma

Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt:

(1) λ ist ein Eigenwert von $f \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0\}$.

(2) Ist $\dim_K(V) < \infty$, dann λ Eigenwert von $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda\mathrm{id}) = 0$.

Beweis

(1) $(f - \lambda\mathrm{id})(v) = f(v) - \lambda\mathrm{id}(v) = f(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow f(v) = \lambda v$.

(2) Klar mit (1).

Bemerkung

(1) Wir haben dabei natürlich gesetzt $\det(g) := \det(M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(g))$ für K-lineares g.

(2) Sind $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}'$ zwei Basen von V, so gilt $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = CM_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}'}(f)C^{-1}$ für ein invertierbares $C \in \mathfrak{M}_K(n, n)$, d.h. es gilt:

$$\det(M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)) = \det(C)\det(M_{\mathfrak{V}'}^{\mathfrak{V}'}(f))\det(C^{-1}) = \det(M_{\mathfrak{V}'}^{(\mathfrak{V}')(f)}).$$

Anmerkung

Für obiges Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} \det(f - \lambda\mathrm{id}) &= \det\begin{pmatrix} \cos(\theta) - \lambda & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\cos(\theta) - \lambda)^2 + \sin^2(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - 2\lambda\cos(\theta) + \lambda^2 + \sin^2(\theta) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\cos(\theta) + 1. \end{aligned}$$

Also $\det(f - \lambda\mathrm{id}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \cos(\theta) \pm \sqrt{\cos^2(\theta) - 1} = \cos(\theta) \pm \sqrt{-\sin^2(\theta)} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, falls $\theta \neq n\pi$.

Zusammenfassung

Seien V ein endlich dimensionaler K-Veltorraum, $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung, $\lambda \in K$ und $v \in V\backslash\{0\}$. Dann sind äquivalent:

(1) λ ist Eigenwert von v.
(2) Es gibt $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$.
(3) Es gibt $v \neq 0$ mit $(f - \lambda\mathrm{id})(v) = 0$.
(4) $\mathrm{Kern}(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0\}$.
(5) $\det_n(A - \lambda I_n) = 0$.

Bemerkung

Wir nennen $\lambda \in K$ einen Eigenwert von $A \in \mathfrak{M}_K(n, n)$, falls $\det_n(A - \lambda I_n) = 0$.

Behauptung

Ist $A \approx B$ und λ ein Eigenvert von A, so ist λ auch ein Eigenwert von B.

Beweis

Sei $B = CAC^{-1}$ für ein invertierbares $C \in \mathfrak{M}_K(n,n)$. Dann gilt:

$$C(A - \lambda I_n)C^{-1} = CAC^{-1}C(\lambda I_n)C^{-1} = CAC^{-1} - \lambda I_n = B - \lambda I_n,$$

also $0 = \det_n(A - \lambda I_n) = \det_n(B - \lambda I_n)$.

Merke

Eigenwerte sind invariant unter Basistransformationen.

Definition

A heißt *diagonalisierbar* (über K), falls es ein $B \approx A$ gibt mit $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in K$.

Beispiel

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

Wegen $\det_n(A - \lambda I_n) = (1-\lambda)^2 + 2 = 3 - 2\lambda + \lambda^2$ hat A nämlich die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-2} = 1 \pm i\sqrt{2}$. Also besitzt A keine reellen Eigenwerte und ist damit über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar.

Sei v_1 Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und v_2 Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1 - i\sqrt{2}$. Dann ist $\mathfrak{V} := (v_1, v_2)$ eine Basis des $\mathbb{C}^2$. Setze $f := L_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(A)$, also $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Dann $A = M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(f)$ und $A \approx B$ mit $B := M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren, etwa $v_1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} (1-\lambda_1)x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 & + & (1-\lambda_1)x_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} -i\sqrt{2}x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ -x_1 & - & i\sqrt{2}x_2 & = & 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Eine Lösung ist beispielsweise $\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel

Wir betrachten $A := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$. Dann $L(A) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) - \lambda & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) - \lambda \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda I_2) = -\cos^2(\alpha) + \lambda^2 - \sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Die Matrix besitzt also die beiden Eigenwerte ± 1 und ist damit (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar: $A \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} \cos(0,5\alpha) \\ \sin(0,5\alpha) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0,5\cos(\alpha + \pi) \\ 0,5\sin(\alpha + \pi) \end{pmatrix}$.

Definition

Für $A \in \mathfrak{M}_K(n,n)$ heißt

$$P_A := \det_n(A - tI_n)$$

das *charakteristische Polynom* von A.

Ist $A = M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ die Darstellungsmatrix des Endomorphismus $f : V \to V$ bzgl. der Basis $\mathfrak{V}$ (wobei $\dim_K(V) < \infty$), so heißt $P_f = \det_n(A - tI_n)$ auch das charakteristische Polynom von f.

Bemerkung

Die Definition ist unabhängig von der gewählten Basis $\mathfrak{V}$.

Satz

Sei $\dim_K(V) = n < \infty$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$.

Dann sind die Eigenwerte von f genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von f in K.

Beweis

Schon gezeigt: λ Eigenwert von $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = \det_n(A - \lambda I_n) = 0$.

Korollar

Jeder Endomorphismus des $\mathbb{R}^{2n+1}$ hat einen reellen Eigenwert (und damit auch einen Eigenvektor).

Beweis

P_f hat den Grad $2n + 1$, also hat P_f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Bemerkung

Ist $A \in \mathfrak{M}_K(n, n)$, dann gilt:

$$\det_n(A - tI_n) = (-1)^n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + ... + c_1 t + \det_n(A),$$

wobei $c_{n-1}, ..., c_1 \in K$.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann $A - tI_2 = \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}$ und $P_A = (a - t)(d - t) - bc$.

Lemma

Sei $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{K(t)}(n, n)$ eine Matrix mit $b_{ij} \in K[t]$.

Dann ist $\det_n(B) \in K[t]$ und es gilt: $\det_n(B)(\lambda) = \det_n(b_{ij}(\lambda))$.

Beweis

Per Indultion über n.

Der Fall $n = 1$ ist klar, denn $\det_1(a)(\lambda) = a(\lambda) = \det_1(a(\lambda))$.

Gelte die Behauptung für $n - 1$. Nach der Entwicklungsformel gilt:

$$\begin{aligned}
\det_n(b_{ij}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{b_{1k}}_{\in K[t]} \det_{n-1} \underbrace{((b_{ij})_{1k})}_{\in K[t]}; \\
\det_n(b_{ij})(\lambda) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_{1k}(\lambda) \det_{n-1}(b_{ij})_{1k}(\lambda) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_{1k}(\lambda) \det_{n-1}(b_{ij}(\lambda))_{1k} \\
&= \det_n((b_{ij})(\lambda)).
\end{aligned}$$

Definition

Sei $p(t) = (t - \alpha)^\nu q(t)$ mit $q(\alpha) \neq 0$.

Dann heißt $\nu = \mu(p, \alpha)$ die *Vielfachheit (Multiplizität)* von α in p.

Bemerkung

Sei $p(t) = \gamma(t - \alpha_1)^{\nu_1} ... (t - \alpha_s)^{\nu_s}$ mit $\alpha_1, ..., \alpha_s$ paarweise verschieden, $\nu_1, ..., \nu_s \in \mathbb{N}$ und $\deg(p) = n$.
Dann gilt $\sum_{i=1}^{s} \nu_i = n$.

Satz

Seien $f : V \to V$ ein Endomorphismus des endlich dimensionalen Vektorraums V und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f.

Dann ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ ein Untervektorraum von V, der *Eigenraum* von λ bzgl. f.

Beweis

Wegen $f(0) = 0 = \lambda 0$ ist stets $0 \in \mathrm{Eig}(f, \lambda)$.

Seien $v_1, ..., v_m \in \mathrm{Eig}(f, \lambda)$, $\alpha_1, ..., \alpha_m \in K$. Dann gilt:

$$f(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m) = \alpha_1 f(v_1) + ... + \alpha_m f(v_m) = \alpha_1 \lambda v_1 + ... + \alpha_m \lambda v_m = \lambda(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m),$$

d.h. mit $v_1, ..., v_m$ liegt auch $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m$ in $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$.

Lemma

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$.

Dann ist $\mu(P_f, \lambda) \geq \dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda))$.

Beweis

Sei $v_1, ..., v_r$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$, d.h. $\dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) = r$. Wir ergänzen diese zu einer Basis $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n)$ von V.

Dann hat $A = M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ die Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right).$$

Für das charakteristische Polynom gilt dann:

$$P_f = \det_n(A - tI_n) = \det_r \begin{pmatrix} \lambda - t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - t \end{pmatrix} \det_{n-r}(A' - tI_{n-r}) = (\lambda - t)^r \det_{n-r}(A' - tI_{n-r}).$$

Also $r \leq \mu(P_f, \lambda)$.

Definition

Seien V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension n und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$.

f heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathfrak{V}$ von V gibt, so dass $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Diagonalgestalt hat.

$A \in \mathfrak{M}_K(n, n)$ heißt diagonalisierbar, falls es ein invertierbares $C \in \mathfrak{M}_K(n, n)$ gibt, so dass CAC^{-1} Diagonalgestalt hat.

Satz

A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $L(A)$ ist diagonalisierbar.

Beweis

$\Rightarrow$: $CAC^{-1} = CM_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(A)C^{-1}$ habe Diagonalgestalt. Wähle eine Basis $\mathfrak{V}$ von V so, dass $C = M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{E}}(\mathrm{id})$. Dann ist $CAC^{-1} = M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(L(A))$.

$\Leftarrow$: Seien $f := L(A)$, $\mathfrak{E} := (e^{(1)}, ..., e^{(n)})$ die kanonische Basis von V, $M_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(f) = A$ und $\mathfrak{V}$ eine Basis von V derart, dass $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Diagonalgestalt hat. Dann ist $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = CM_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{E}}(f)C^{-1} = CAC^{-1}$ mit $C := M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{E}}(\mathrm{id}) \in GL(n, K)$.

Wiederholung

Seien $U_1, ..., U_k$ Untervektorräume von V. Dann bedeutet $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$, dass $V = U_1 + ... + U_k$ und $(0 = u_1 + ... + u_k \Rightarrow u_1 = ... = u_k = 0 \ (u_i \in U_i)$.

Es gilt $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k \Rightarrow \dim_K(V) = \sum_{i=1}^k \dim_K(U_i)$.

Satz

Seien V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension n und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Dann sind äquivalent:

(1) V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren zu f.
(2) f ist diagonalisierbar.
(3) P_f zerfällt in Linearfaktoren und $\mu(P_f, \lambda) = \dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda))$.
(4) Sind $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von f, so gilt: $V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_k)$.

Beweis

(1) $\Leftrightarrow$ (4):
Setze $E_i := \mathrm{Eig}(f, \lambda_i),\ 1 \leq i \leq k$, und $\dim_K(E_i) := r_i,\ \lambda_1, ..., \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte.

Dann $E := E_1 + ... + E_k \subseteq V$. Da $0 = \sum_{i=1}^k u_i$ mit $u_i \in E_i$ und alle u_i Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten impliziert, dass alle $u_i = 0$, folgt die Direktheit der Summe, d.h. $E = E_1 \oplus ... \oplus E_k$.

Weiter ist $\dim_K(E) = r_1 + ... + r_k \leq \mu(f, \lambda_1) + ... + \mu(f, \lambda_k) \leq \deg(P_f) = n$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2):
Es gilt: $Av_i = \lambda_i v_i$.

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) & = & \lambda_1 v_1 \\ & \vdots & \\ f(v_n) & = & \lambda_n v_n \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

also $(v_1, ..., v_n)$ Basis von V aus Eigenvektoren $\Leftrightarrow$ die Darstellungsmatrix von f ist diagonalisierbar.

(2) $\Leftrightarrow$ (4):
f ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^k r_i = n$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3):
$r_i = \mu(f, \lambda_i)$ für $1 \leq i \leq k$ und $P_f = \gamma \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{r_i}$.

Definition

Eine quadratische Matrix der Gestalt $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*.

$f \in \mathrm{Hom}_K(n, n)$ heißt *trigonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ von V gibt, so dass $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f)$ Dreiecksgestalt hat.

$A \in \mathfrak{M}_K(n, n)$ heißt trigonalisierbar, falls $L(A)$ trigonalisierbar ist, d.h. falls es eine invertierbare Matrix $C \in \mathfrak{M}_K(n, n)$ gibt, so dass CAC^{-1} Dreiecksgestalt hat.

Bemerkung

Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar: Drehmatrizen um den Winkel α haben z.B. für $\alpha \neq n\pi$ keine Eigenvektoren, also auch keine Eigenwerte und lassen sich damit nicht in Diagonalgestalt überführen.

Allerdings sind alle Matrizen über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar:

Satz

$f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ ist trigonalisierbar $\Leftrightarrow P_f$ zerfällt in Linearfaktoren.

Beweis

$\Rightarrow$: Sei $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$. Dann gilt für das charakteristische Polynom:

$$P_f = \det_n \begin{pmatrix} \alpha_1 - t & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n - t \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i),$$

d.h. P_f zerfällt in Linearfaktoren.

$\Leftarrow$: Wir führen eine Induktion über n.

Der Fall $n = 1$ ist trivial. Sei $P_f = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - t)$ mit $\alpha_i \in K$ und α_1 Eigenwert von f zum Eigenvektor v_1. Wir ergänzen zu einer Basis $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ von V.

Wegen $f(v_1) = \alpha_1 v_1 + 0 v_2 + ... + 0 v_n$ ist

$$\begin{aligned} A &= M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \text{ und} \\ P_A &= \det_n (A - tI_n) = (\alpha_1 - t) \det_{n-1} (A_1 - tI_{n-1}) = (\alpha_1 - t) P_{A_1} = (\alpha_1 - t) \prod_{i=2}^{n} (\alpha_i - t), \end{aligned}$$

also $P_{A_1} = \prod_{i=2}^{n} (\alpha_i - t)$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $C \in GL(n-1, K)$, so dass CAC^{-1} Dreiecksgestalt hat.

Also:

$$\begin{aligned} A &\approx \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right)^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & CA_1C^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \beta_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{array}\right). \end{aligned}$$