Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Der Satz von Hamilton-Cayley

Vorgriff

Wir nennen einen Körper K, über dem alle Polynome aus $K[t]$ in Linearfaktoren zerfallen, *algebraisch abgeschlossen*.

In der Vorlesung Algebra werden wir zeigen, dass jeder Körper einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper besitzt.

Satz von Hamilton-Cayley

Seien V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension n, $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ und P_f das charakteristische Polynom von f. Dann gilt $P_f(f) = 0$.

Beweis

(1) Sei zunächst K algebraisch abgeschlossen. Dann gibt es eine Basis $\mathfrak{V} = (v_1, ..., v_n)$ von V, so dass $M_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} =: (a_{ij})$.

Setze $W_i := \mathrm{span}(v_1, ..., v_i)$ für $0 \leq i \leq n$, d.h. $\{0\} =: W_0 \subseteq W_1 \subseteq ... \subseteq W_n = V$.

Für $f_i := f - \alpha_i \mathrm{id}$ gilt $f_i : W_i \to W_{i-1}$, denn $f_i(v_j) = \sum_{l=1}^{j} \alpha_{lj} v - \alpha_i v_j \in W_{i-1}$ für alle $j \leq i$.

Also $f_1 \circ ... \circ f_n : W_n \to W_0$, d.h. $\prod_{i=1}^{n}(f - \alpha_i \mathrm{id}) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i \mathrm{id} - f) = 0$. Also $P_f(f) = 0$.

(2) Wir betrachten nun den (nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossenen) Körper K_0. Dann $L(A) : K_0^n \to K_0^n$ und $L(A) : K^n \to K^n$. Wir haben gezeigt, dass $P_A(A) = 0$. Wegen $A \in \mathfrak{M}_{K_0}(n, n)$ und $P_A \in K_0[t]$ gilt diese Aussage auch für K_0.

Korollar

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. Dann gibt es ein $W \subseteq V$ mit $1 \leq \dim_{\mathbb{R}}(W) \leq 2$ und $f(W) = W$ (d.h. W ist f-invariant)

Beweis

(1) Habe P_f eine reelle Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit zugehörigem Eigenvektor v. Setze $W = \mathbb{R}v$.

(2) Habe P_f nun keine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Dann ist $P_f = \pm P_1 ... P_k \in \mathbb{R}[t]$ mit $\deg(P_i) = 2$. Nach Hamilton-Cayley ist $P_f(f) = P_k(f) \circ ... \circ P_1(f) = 0$ und $P_0 = \mathrm{id}$ ($P_0(w) = w \neq 0$).

Seien $w \in V \backslash \{0\}$ und $i \in \{1, ..., k\}$ mit $(P_{i-1}(f) \circ ... \circ P_0(f))(w) \neq 0$ und $P_i = t^2 + \alpha t + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann $P_i(f) = f^2 + \alpha f + \beta \mathrm{id}$.

Wegen $0 = P_i(f)(v) = f(f(v)) + \alpha f(v) + \beta v$ ist $f(f(v)) = -\alpha f(v) - \beta v \in \underbrace{\mathbb{R}f(v) + \mathbb{R}v}_{=:W}$.

Dann $f(W) \subseteq W$, da $f(v) \in W$ und $f(f(v)) \in W$, und $1 \leq \dim_{\mathbb{R}}(W) \leq 2$.

Bemerkung

Jedes reelle Polynom $p \in \mathbb{R}[t]$ zerfällt über $\mathbb{R}$ in lineare und quadratische Faktoren, denn sei λ eine komplexe Nullstelle von p. Dann ist auch sein komplex Konjugiertes $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von $\mathbb{R}$ mit gleicher Vielfachheit wie λ.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dann $P_A = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 3$ und damit $P_A(A) = A^2 - 2A + 3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.