Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Ein nicht trivialer Ring

Behauptung

Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X.

Dann bildet $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ einen kommutativen Ring mit Eins, wobei $\cap$ der übliche Mengenschnitt und Δ die symmetrische Differenz ist (d.h. $A\Delta B := (A\cup B)\backslash(A\cap B)$ für $A, B \in \mathcal{P}(X)$; dabei ist $\cup$ natürlich die übliche Mengenvereinigung).

Beweis

Die Verknüpfungen Δ und $\cap$ bilden tatsächlich Elemente aus $\mathcal{P}(X)$ wieder nach $\mathcal{P}(X)$ ab.

Vorüberlegungen

Seien $A, B, C, D \in \mathcal{P}(X)$. Durch elementweises Nachrechnen zeigt man:

(1) $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.
(2) $C\backslash(A \cup B) = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$.
(3) $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B \cup C)$.
(4) $C\backslash(A\backslash B) = (C \cap B) \cup (C\backslash A)$.
(5) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$.
(6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ und $A \cap B = B \cap A$ (nach Definition von $\cap$);
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $A \cup B = B \cup A$ (nach Definition von $\cup$).
(7) $(A\backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ (trivial).
(8) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$.
(9) $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

Wir zeigen exemplarisch (1) und (2).

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)\backslash C \quad &\Leftrightarrow \quad (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ x \notin C \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \ \wedge \ x \notin C) \ \vee \ (x \in B \ \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (A\backslash C) \ \vee \ x \in (B\backslash C) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (A\backslash C) \cup (B\backslash C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in C\backslash(A \cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in C \ \wedge \ x \notin A \ \wedge \ x \notin B \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in C \ \wedge \ x \notin A) \ \wedge \ (x \in C \ \wedge \ x \notin B) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (C\backslash A) \ \wedge \ x \in (C\backslash B) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (C\backslash A) \cap (C\backslash B)
\end{aligned}$$

Assoziativität von Δ

$$\begin{aligned}
(A\Delta B)\Delta C \quad &\overset{\text{Def.}}{=} \quad ((A \cup B)\backslash(A \cap B))\Delta C \\
&\overset{9}{=} \quad ((A\backslash B) \cup (B\backslash A))\Delta C \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \quad (((A\backslash B) \cup (B\backslash A)) \cup C)\backslash(((A\backslash B) \cup (B\backslash A)) \cap C) \\
&\overset{9}{=} \quad (((A\backslash B) \cup (B\backslash A))\backslash C) \cup (C\backslash((A\backslash B) \cup (B\backslash A))) \\
&\overset{(1),(2)}{=} \quad (((A\backslash B)\backslash C) \cup ((B\backslash A)\backslash C)) \cup ((C\backslash(A\backslash B)) \cap (C\backslash(B\backslash A))) \\
&\overset{(3),(4)}{=} \quad (A\backslash(B \cup C)) \cup (B\backslash(A \cup C)) \cup (((C \cap B) \cup (C\backslash A)) \cap ((C \cap A) \cup (C\backslash B))) \\
&\overset{(5)}{=} \quad (A\backslash(B \cup C)) \cup (B\backslash(A \cup C)) \cup ((C \cap B) \cap (C \cap A)) \cup \underbrace{((C \cap B) \cap (C\backslash B))}_{=\emptyset} \\
&\qquad \cup \underbrace{((C\backslash A) \cap (C \cap A))}_{=\emptyset} \cup ((C\backslash A) \cap (C\backslash B))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2),(6)}{=} && (A\backslash(B\cup C))\cup(B\backslash(A\cup C))\cup(C\backslash(A\cup B))\cup(A\cap B\cap C)\\
&\overset{(2),(6)}{=} && \underbrace{((A\cap C)\cap(A\cap B))}_{=A\cap B\cap C}\cup\underbrace{((A\cap C)\cap(A\backslash C))}_{=\emptyset}\cup\underbrace{((A\backslash B)\cap(A\cap B))}_{=\emptyset}\\
& && \cup\underbrace{((A\backslash B)\cap(A\backslash C))}_{=A\backslash(B\cup C)}\cup(B\backslash(A\cup C))\cup(C\backslash(A\cup B))\\
&\overset{\text{Nachrechnen!}}{=} && (((A\cap C)\cup(A\backslash B))\cap((A\cap B)\cup(A\backslash C)))\cup((B\backslash(C\cup A))\cup(C\backslash(B\cup A)))\\
&\overset{(2),(3)}{=} && ((A\backslash(B\backslash C))\cap(A\backslash(C\backslash B)))\cup(((B\backslash C)\backslash A)\cup((C\backslash B)\backslash A))\\
&\overset{\text{Def.}}{=} && (A\backslash((B\backslash C)\cup(C\backslash B)))\cup(((B\backslash C)\cup(C\backslash B))\backslash A)\\
&\overset{\text{Def.},(9)}{=} && A\Delta((B\backslash C)\cup(C\backslash B))\\
&\overset{\text{Def.},(9)}{=} && A\Delta(B\Delta C)
\end{aligned}
$$

Neutrales bzgl. Δ

$A\Delta\emptyset=(A\cup\emptyset)\backslash(A\backslash\emptyset)=A\backslash\emptyset=A=A\backslash\emptyset=(\emptyset\cup A)\backslash(\emptyset\cap A)=\emptyset\Delta A$, d.h. $\emptyset$ ist neutral bzgl. Δ.

Inverse bzgl. Δ

$A\Delta A=(A\cup A)\backslash(A\cap A)=A\backslash A=\emptyset$, d.h. jedes A ist zu sich selbst invers.

Kommutativität von Δ

$A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)=(B\cup A)\backslash(B\cap A)=B\Delta A$, d.h. $(\mathcal{P}(X),\Delta)$ ist kommutativ.

$\boxed{\text{Also ist } (\mathcal{P}(X),\Delta) \text{ eine abelsche Gruppe.}}$

Assoziativität von $\cap$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ nach Definition (axiomatischer Einführung) von $\cap$.

Gültigkeit der Distributivgesetze

$$
\begin{aligned}
A\cap(B\Delta C) &= A\cap((B\cup C)\backslash(C\cap B))\\
&= A\cap((B\backslash C)\cup(C\backslash B))\\
&= (A\cap(B\backslash C))\cup(A\cap(C\backslash B))\\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C))\backslash((A\cap C)\cap(A\cap B))\\
&= (A\cap B)\Delta(A\cap C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A\Delta B)\cap C &= ((A\backslash B)\cap(B\backslash A))\cap C\\
&= ((A\backslash B)\cap C)\cup((B\cap A)\cap C)\\
&= ((A\cap C)\backslash(B\cap C))\cup((B\cap C)\backslash(A\cap C))\\
&= (A\cap C)\Delta(B\cap C)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Also ist } (\mathcal{P}(X),\Delta,\cap) \text{ ein Ring.}}$

Kommutativität von $\cap$

$A\cap B=B\cap A$ nach Definition von $\cap$.

Einselement

Für alle $A\in\mathcal{P}(X)$ ist $A\cap X=A=X\cap A$, d.h. X ist neutral bzgl. $\cap$.

$\boxed{\text{Also ist der Ring } (\mathcal{P}(X),\Delta,\cap) \text{ kommutativ mit Einselement.}}$