Martin Gubisch
Lineare Algebra I
WS 2007/2008

Fortsetzungen linearer Abbildungen

Definition

Seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume, U_1, U_2 zwei Unterräume von V und $f_1 : U_1 \to W$, $f_2 : U_2 \to W$ zwei K-lineare Abbildungen.

Eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt eine *gemeinsame Fortsetzung* von f_1 und f_2 auf V, falls $f_{|U_1} = f_1$ und $f_{|U_2} = f_2$.

Bemerkung

Wir haben schon des Öfteren Erweiterungen von Körpern und Ringen betrachtet; beispielsweise haben wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch Adjunktion des als eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ definierten Elements i zum Körper $\mathbb{C} := \mathbb{R}[i]$ der komplexen Zahlen erweitert. Auch den Ring der Polynome $\mathbb{R}[X]$ über $\mathbb{R}$ haben wir erhalten, indem wir $\mathbb{R}$ mit einem transzendenten Element X erweitert haben, d.h. einem Element, das in *keiner* Relation mit den reellen Zahlen steht.

Ebenso interessant wie solche Erweiterungen ist die Frage, ob und wie sich Homomorphismen auf die erweiterte Struktur fortsetzen lassen. Konkret suchen wir zu einer uns bekannten Abbildung f mit gewissen Eigenschaften wie Linearität (Ordnungstreue, Abstandstreue, Stetigkeit, ...) auf einer gegeben Struktur eine Abbildung, die auf einem größeren Definitionsbereich definiert ist, auf der gegebenen Struktur die gleichen Werte wie f liefert und auf der größeren Struktur die gleichen Eigenschaften wie f hat.

Proposition

Seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume, U_1, U_2 zwei Unterräume von V mit $V = U_1 \oplus U_2$ und $f_1 : U_1 \to W,\ f_2 : U_2 \to W$ zwei K-lineare Abbildungen.

Dann existiert genau eine gemeinsame Fortsetzung f von f_1 und f_2.

Beweis

Sei $u \in V$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$ mit $u = u_1 + u_2$: Die Existenz von u_1, u_2 ist wegen $V = U_1 + U_2$ gesichert und wären $u_1' \in U_1, u_2' \in U_2$ zwei weitere Elemente mit $u = u_1' + u_2'$, dann $U_1 \ni u_1 - u_1' = u_2' - u_2 \in U_2$, d.h. $u_1 - u_1', u_2' - u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und damit $u_1 = u_1'$ und $u_2 = u_2'$. Also ist die Darstellung von u auch eindeutig.

Wir definieren jetzt $f : V \to W$ durch $\forall u = u_1 + u_2 \in V : f(u) := f_1(u_1) + f_2(u_2)$.

f ist K-linear, denn

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f((v_1+v_2)+(w_1+w_2)) = f((v_1+w_1)+(v_2+w_2)) = f_1(v_1+w_1)+f_2(v_2+w_2) \\ &= f_1(v_1)+f_1(w_1)+f_2(v_2)+f_2(w_2) = f_1(v_1)+f_2(v_2)+f_1(w_1)+f_2(w_2) \\ &= f(v_1+v_2)+f(w_1+w_2) = f(v)+f(w). \end{aligned}$$

f ist eindeutig, denn wäre $f' : V \to W$ eine weitere Fortsetzung von f_1 und f_2, dann gilt

$$f'(u) = f'(u_1+u_2) = f_1(u_1)+f_2(u_2) = f(u_1+u_2) = f(u)$$

für alle $u \in V$, d.h. $f = f'$.

Korollar

Seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume, U_1, U_2 zwei Unterräume von V und $f_1 : U_1 \to W$, $f_2 : U_2 \to W$ zwei K-lineare Abbildungen.

(1) Genau dann gibt es mindestens eine gemeinsame Fortsetzung von f_1 und f_2 auf V, wenn für alle $u \in U_1 \cap U_2$ gilt, dass $f_1(u) = f_2(u)$.

(2) Es existiert höchstens eine Fortsetzung von f_1 und f_2 auf V, wenn $V = U_1 + U_2$ gilt.

(3) Genau dann lassen sich f_1, f_2 eindeutig auf V fortsetzen, wenn (1) und (2) erfüllt sind.

Beweis

(1) Setze $U := U_1 + U_2$. Definiere $f : U \to W$ durch $f(u) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$, wobei $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ mit $u = u_1 + u_2$. Dann ist f wohldefiniert, denn seien $u_1' \in U_1, u_2' \in U_2$ mit $u_1' + u_2' \in U$. Dann liegt $u_1' - u_1 = u_2 - u_2'$ in $U_1 \cap U_2$ und damit gilt

$$\begin{aligned} f(u_1' + u_2') &= f_1(u_1') + f_2(u_2') = f_1(u_1') - f_1(u_1) + f_1(u_1) + f_2(u_2') = f_1(u_1' - u_1) + f_1(u_1) + f_2(u_2') \\ &= f_2(u_2 - u_2') + f_1(u_1) + f_2(u_2') = f_2(u_2) - f_2(u_2') + f_1(u_1) + f_2(u_2') = f_1(u_1) + f_2(u_2) \\ &= f(u_1 + u_2). \end{aligned}$$

Dieses f ist eindeutig bestimmt und linear, also eine Fortsetzung von f_1 und f_2 auf U.

Sei nun U' ein Komplement von U, d.h. $V = U \oplus U'$. Wir definieren $f' : V \to W$ durch $f'(v) := f(u)$, wobei v die eindeutige Darstellung $v = u + u'$ mit $u \in U,\ u' \in U'$ habe. Dann ist f' eine K-lineare Fortsetzung von f auf V, also auch insbesondere eine K-lineare Fortsetzung von f_1 und f_2.

Ist umgekehrt f' eine Fortsetzung von f_1 und f_2 auf V, dann $\forall u \in U_1 \cap U_2 : f_1(u) = f(u) = f_2(u)$.

(2) Wir haben gezeigt, dass eine Fortsetzung f von f_1, f_2 auf $U_1 + U_2$ eindeutig ist. Im Fall $V = U_1 + U_2$ gibt es also höchstens eine solche.

(3) Klar: Sind (1) und (2) erfüllt, dann existiert genau eine Fortsetzung von f_1 und f_2 auf V.

Gibt es umgekehrt eine eindeutige Fortsetzung f' von f_1 und f_2 auf V, Œ f' definert wie in (1), dann gilt offenbar (1). Würde (2) nicht gelten, dann gäbe es ein nicht triviales Komplement U' von $U := U_1 + U_2$ in V. Sei f wie in (1) definiert, dann wäre $f''(v) := f(u) + u'$ $(v = u + u' \in U \oplus U')$ eine K-lineare Fortsetzung von f_1, f_2 auf V mit $f'' \neq f'$, Widerspruch.