Merkblatt "Integrationstheorie Nrn. 13-16"

(Nrn. 13 und 15 sind nicht Gegenstand der Anwesenheitsübung am 16.2./3.4.; sie gehören aber, samt Beweisen (s. S. 3,4), zum Gegenstandsbereich von Zwischen- bzw. Diplom-Vorprüfungen.)

Im folgenden sei μ ein Maß auf einer Menge Ω.

13. Fast überall bestehende Eigenschaften

Def. (i) Eine messbare Teilmenge $M_0 \subset \Omega$ heißt Nullmenge $:\Leftrightarrow \mu(M_0) = 0$. (ii) Eine Eigenschaft η, die jedes Element von Ω hat oder nicht hat, besteht "μ-fast überall" $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Nullmenge $M_0 \subset \Omega$, so dass η für jedes $\omega \in \Omega \setminus M_0$ gilt.

Kor. Für $f \geq 0$ gilt: $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-fast überall.

Kor. M_0 Nullmenge $\Rightarrow \int_{M_0} f d\mu = 0$.

Kor. $f = g$ μ-fast überall, f integrierbar, g messbar $\Rightarrow$ g integrierbar und $\int g d\mu = \int f d\mu$.

Kor. Falls $|f| \leq g$ fast überall, so ist mit g auch f μ-integrierbar.

Kor. Jede μ-integrierbare Funktion ist μ-fast überall reellwertig.

Def. Eine μ-fast überall definierte numerische Funktion heißt μ-integrierbar, wenn sie zu einer auf ganz Ω definierten μ-integrierbaren numerischen Funktion $\tilde{f}$ fortgesetzt werden kann. Die Größe $\int \tilde{f} d\mu$ heißt dann das μ-Integral von f und wird auch einfach mit $\int f d\mu$ bezeichnet.

14. Die Räume $\mathcal{L}^1(\mu)$ und $L^1(\mu)$

Def. (i) $\mathcal{L}^1(\mu) :=$ Menge aller integrierbaren reellen Funktionen. (ii) $f \mapsto N_1(f) := \int |f| d\mu$.

Kor. $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum. N_1 Halbnorm: $N_1(\alpha f) = |\alpha| N_1(f)$; $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$.

Kor. Für jede Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$, die bzgl. N_1 gegen $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ konvergiert, ist $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$. Kurz gesagt: Das Integral ist eine stetige Linearform auf $(\mathcal{L}^1(\mu), N_1)$.

Def. (i) Mit $\mathcal{N}(\mu) =$ Menge aller messbaren Funktionen, die μ-fast überall gleich 0 sind, setze

$$L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/\mathcal{N}(\mu).$$

(ii) Mit $[f] = \{g : g - f \in \mathcal{N}(\mu)\} :=$ Äquivalenzklasse von f setze

$$\|[f]\|_1 := N_1(f) = \int |f| d\mu.$$

(iii) Für $f \in L^1(\mu)$ setze

$$\int [f] d\mu := \int f d\mu.$$

Satz (Vollständigkeit von L^1). $(L^1(\mu), \|.\|_1)$ ist ein vollständiger normierter Raum. Das Integral ist eine stetige Linearform darauf.

Bew. Vollständigkeit folgt aus dem Satz von Riesz-Fischer (s. Abschnitt 15). Rest trivial.

15. Sätze von Fatou, Riesz-Fischer, Lebesgue

Satz ("Lemma von Fatou").
Für jede Folge $(f_n)_n$ messbarer numerischer Funktionen ≥ 0 gilt:

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Satz ("Satz von Lebesgue", "Satz von der majorisierten Konvergenz").
Sei $(f_n)_n : \Omega \to I\!R$ eine μ-fast überall konvergente Folge von Funktionen in $\mathcal{L}^1(\mu)$. Es gebe eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit

$$|f_n| \leq g, \quad \forall n \in I\!N.$$

Dann gibt es eine messbare Funktion $f : \Omega \to I\!R$, gegen die f_n μ-fast überall konvergiert. Jede solche Funktion liegt selber in $\mathcal{L}^1(\mu)$ und ist auch Grenzwert der f_n im Sinne der Halbnorm N_1.

Satz ("Satz von Riesz-Fischer").
Jede Cauchy-Folge $(f_n)_n$ in $(\mathcal{L}^1(\mu), N_1)$ hat einen Grenzwert f in diesem Raum:

$$\text{es existiert ein } f \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

In dieser Situation gibt es auch eine Teilfolge, die außerdem punktweise μ-fast überall konvergiert:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\omega) = f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega \setminus M_0, \text{ mit } \mu(M_0) = 0.$$

Beweis des Vollständigkeitssatzes aus Nr. 14.
$([f_n])_n$ ist genau dann Cauchy-Folge in $(L^1(\mu), \|.\|_1)$, wenn $(f_n)_n$ Cauchy-Folge in $(\mathcal{L}^1(\mu), N_1)$. $[f] \in L^1(\mu)$ ist genau dann Grenzwert einer Folge $([f]_n)_n$ in $L^1(\mu)$ bzgl. der Norm $\|.\|_1$, wenn $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ Grenzwert der Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$ bzgl. der Halbnorm N_1 ist. Also finden wir den Grenzwert einer Cauchy-Folge $([f_n])_n$ als Äquivalenzklasse $[f]$ des nach Riesz-Fischer existierenden Grenzwertes f der Folge $(f_n)_n$.

16. Kompatibilität des Lebesgueschen mit dem Riemannschen Integralbegriff

Satz. Sei $[a,b] \subset I\!R^d$ ein beschränktes Intervall. Wenn zu $f : [a,b] \to I\!R$ das Riemann-Integral existiert, dann existiert auch das Lebesgue-Integral, und beide haben denselben Wert:

$$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda^d.$$

(Wie zuvor ist hierbei λ^d das Lebesgue-Borelsche Maß im $I\!R^d$.)

Beweis. Für Treppenfunktionen $u = \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{A_i}$, $I_i \subset [a,b]$ Intervalle, ist die Identität des Lebesgueschen mit dem Riemannschen Integral evident. Für gleichmäßige Grenzwerte von Treppenfunktionen auf einem beschränkten Intervall $[a,b]$ — Riemann-integrierbare Funktionen sind solche — gilt dasselbe.

BEWEISE zu 13 und 15.

Kor. Für $f \geq 0$ gilt: $\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-fast überall.

Setze $M := \{f > 0\}$. Falls $\int f d\mu = 0$, so gilt mit $A_n := \{f \geq 1/n\}$: $0 = \int f d\mu \geq n^{-1}\mu(A_n) \geq 0$, also $\mu(A_n) = 0$, und da $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, ist $\mu(N) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.
Falls andererseits $\mu(N) = 0$, dann ist $0 \leq \int f d\mu \leq \int (\infty 1_M) d\mu = 0$, also $\int f d\mu = 0$.

Kor. M Nullmenge $\Rightarrow \int_M f d\mu = 0$.

$\int_M f d\mu = \int_M f^+ d\mu - \int_M f^- d\mu = 0$, und $\int_M f^\pm d\mu = \int (f^\pm 1_{M_0}) d\mu = 0$, da $f^\pm 1_M = 0$ μ-fast ü.

Kor. $f = g$ μ-fast überall, f integrierbar, g messbar $\Rightarrow$ g integrierbar und $\int g d\mu = \int f d\mu$.

Mit $M := \{f \neq g\}$ ist $\int_M f^\pm d\mu = \int_M g^\pm d\mu = 0$ und $\int_{M^c} f^\pm d\mu = \int_{M^c} g^\pm d\mu$.

Kor. Falls $|f| \leq g$ fast überall, so ist mit g auch f μ-integrierbar.

$\tilde{g} := g \vee |f|$ ist messbar, $\tilde{g} = g$ μ-fast überall und $|f| \leq \tilde{g}$ überall. Da g integrierbar, ist $\tilde{g}$ integrierbar und nach 12.2. dann auch f.

Kor. Jede μ-integrierbare Funktion ist μ-fast überall reellwertig.

Mit $M := \{|f| = \infty\}$, $\alpha > 0$ beliebig ist $\alpha\mu(M) = \int \alpha 1_M d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty$. Also $\mu(M) = 0$.

Lemma von Fatou:

Mit f_n liegen

$$f := \liminf_{n\to\infty} f_n \quad \text{und} \quad g_n := \inf_{m \geq n} f_m$$

in E^*. Da $g_n \uparrow f$, ist

$$\int f d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Da $g_n \leq f_m$ und folglich

$$\int g_n d\mu \leq \int f_m d\mu \quad \text{für} \quad m \geq n,$$

ist

$$\int f d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int f_m d\mu$$

und

$$\begin{aligned} \int f d\mu &\leq \lim_{n\to\infty} \inf_{m \geq n} \int f_m d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Satz von Lebesgue:

Es gibt Nullmengen M_1 und M_2, so dass

$$\forall \omega \in (M_1)^c : \ \exists \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \qquad \text{und} \qquad \forall \omega \in (M_2)^c : \ g(\omega) < \infty.$$

Setze

$$f(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(\omega), & \omega \in (M_1 \cup M_2)^c \\ 0, & \omega \in (M_1 \cup M_2). \end{cases}$$

Es ist f reellwertig und messbar, und $f = \lim f_n$ μ-fast überall.
Sei nun f irgendeine Funktion mit diesen beiden Eigenschaften; dann ist $|f| \le g$ μ-fast überall und folglich

$$f \text{ und } g_n := |f_n - f| < 2g \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

und es bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = 0. \qquad (*)$$

Nach Fatou ist aber

$$\int \liminf_{n\to\infty} (2g - g_n) d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int (2g - g_n) d\mu.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ kann man diese Ungleichung auch als

$$\int 2g d\mu \le \int 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int g_n d\mu$$

bzw.

$$\limsup_{n\to\infty} \int g_n d\mu \le 0$$

schreiben. Da $g_n \ge 0$, bedeutet dies aber (*).

Satz von Riesz-Fischer:

Da $(f_n)_n$ Cauchy, gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$, so dass

$$N_1(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \le 2^{-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Mit

$$h_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \quad \text{und} \quad h := \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$$

ist $N_1(h) \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, also h integrierbar und fast überall reellwertig. Also konvergiert die Reihe $\sum h_k$ fast überall absolut, mithin die Folge f_{n_k} fast überall. Wegen

$$|f_{n_{k+1}}| = |h_1 + \ldots + h_k + f_{n_1}| \le h + |f_{n_1}| =: g \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

gibt es nach dem Satz von Lebesgue eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, gegen die die f_{n_k} sowohl bzgl. der Halbnorm N_1 als auch punktweise fast überall konvergieren. Bzgl. N_1 konvergiert dann aber auch die ganze ursprüngliche Folge f_n gegen f, denn: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 und ein k, so dass $N_1(f_n - f) \le N_1(f_n - f_{n_k}) + N_1(f_{n_k} - f) < 2\epsilon$ für alle $n \ge n_0$.