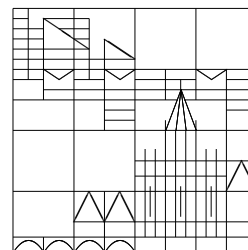


Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
PROF. DR. HEINRICH FREISTÜHLER
DIPL. FIN. ÖKON. THILO MOSELER

10. November 2008



Analysis III 3. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 19. 11. 2008 bis 21. 11. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 17. 11. 2008 um 10.00 Uhr in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 3.1

Bestimmen Sie alle Orbits des Systems

$$\begin{aligned}x'(t) &= \alpha y(t) \\ y'(t) &= -\beta x(t),\end{aligned}$$

mit $\alpha < 0 < \beta$ indem Sie sie als Kurven

$$x = X(y) \quad \text{bzw.} \quad y = Y(x)$$

auffassen, eine Differentialgleichung für diese Kurven aufstellen und diese lösen.

Aufgabe 3.2

Ein Zerfallsprozess, den eine Substanz der Quantität $M(t)$ durchläuft, genüge der Gleichung

$$M'(t) = -\alpha(M(t))^p \quad \text{und} \quad M(0) = M_0 > 0$$

mit Konstanten $\alpha, p > 0$. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (i) Ist $p < 1$, so ist die Substanz nach einer endlichen Zeit vollständig zerfallen, also $M(T) = 0$ für ein $T < \infty$.
- (ii) Ist hingegen $p \geq 1$, so gilt zwar $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = 0$, aber es ist $M(t) > 0$ für alle $t > 0$.
- (iii) Hält man im Fall (i) von den drei Größen $\alpha, p, M_0 > 0$ zwei beliebige fest und variiert die jeweils übrige dritte, so hängt die Zerfallszeit T von dieser streng monoton ab.

Aufgabe 3.3 Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen explizit oder implizit:

$$-2xy \, dx + (3x^2 - y^2) \, dy = 0,$$

$$(\sin(x) - x \cos(x) - 3x^2(y - x)) \, dx + 3x^2(y - x) \, dy = 0.$$

Aufgabe 3.4 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) + \left(x - \frac{1}{x}\right)y(x) + \frac{xe^{-x^2}}{y(x)} = 0, \quad y(1) = 1$$

und begründen Sie Ihr Ergebnis. Die Angabe der Lösung allein reicht nicht aus.