Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Fin. Ökon. Thilo Moseler

17. November 2008

Analysis III
4. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 26. 11. 2008 bis 28. 11. 2008 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 24. 11. 2008 um 10.00 Uhr in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 4.1 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t)\sin(t) + (x(t))^3 \exp(2\cos t), \quad x(0) = 1.$$

Aufgabe 4.2 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \frac{2x(t) + t}{2t + x(t)}, \quad x(1) = 0.$$

Aufgabe 4.3 Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten a, b, c, d. Zeigen Sie, dass der Charakter des zugehörigen Phasenportraits qualitativ durch die beiden Größen

$$\tau := a + d \quad \text{und} \quad \delta := ad - bc$$

bestimmt wird. Treffen Sie dazu Aussagen über die Eigenwerte von $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in den 5 Fällen

$$\delta < 0,\ \tau < -2\sqrt{\delta},\ -2\sqrt{\delta} < \tau < 0,\ 0 < \tau < 2\sqrt{\delta},\ \tau > 2\sqrt{\delta}.$$

Skizzieren Sie die entsprechenden Punktmengen in der (τ, δ)-Ebene. Skizzieren Sie typische Phasenportraits in diesen 5 Fällen und geben Sie an, was daran jeweils typisch ist.

Aufgabe 4.4 Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem aus der vorangehenden Aufgabe mit Koeffizienten a, b, c, d, die

$$\delta > 0 \quad \text{und} \quad \tau = 0$$

erfüllen. Treffen Sie eine allgemeine Aussage über die zugehörigen Orbits und beweisen Sie sie.