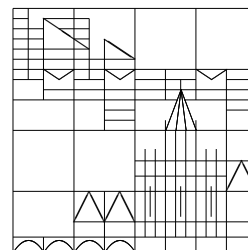


Universität Konstanz
 Fachbereich Mathematik und Statistik
 PROF. DR. HEINRICH FREISTÜHLER
 DIPL. FIN. ÖKON. THILO MOSELER

17. Dezember 2008



Analysis III 8. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstuden vom 14. 1. 2009 bis 16. 1. 2009 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis **Freitag**, den 9. 1. 2009 um 10.00 Uhr in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 8.1 In der Vorlesung wurde die Picard-Abbildung

$$x \mapsto K(x), \quad K(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, t \in I$$

betrachtet; dabei sind $I \ni t_0$ ein reelles Intervall, $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ und $x : I \rightarrow U$. Bestimmen Sie die Picard-Iterierten $K^m(x_0)$, $m \in \mathbb{N}$ mit $x_0(s) \equiv x_0 = 1$ für das Anfangswertproblem

$$x' = x, \quad x(0) = 1.$$

Zeigen Sie *direkt*, daß die Iterierten auf jedem kompakten Intervall $I \ni 0$ gleichmäßig konvergieren, und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

Aufgabe 8.2 Sind die folgenden Funktionen Lipschitz-stetig in der Nähe von $x = 0$?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^2}, \\ g(x) &= |x|^{1/2}, \\ h(x) &= x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0, \quad h(0) = 0, \\ k(x) &= x \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0, \quad k(0) = 0. \end{aligned}$$

Begründen Sie Ihre Antworten im Detail.

Aufgabe 8.3 Für jedes $a \in \mathbb{R}$ bezeichne x_a die Lösung des Anfangswertproblems

$$x_a''(t) = -\sin x_a(t), \quad x_a(0) = a, \quad x_a'(0) = 0.$$

Bestimmen Sie das größte Intervall $A \subset \mathbb{R}$, so daß für jedes $a \in A$ die Lösung $x_a(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe 8.4 Mit x_a und A aus Aufgabe 8.3 sei

$$X(t, a) := x_a(t) \text{ für alle } (t, a) \in \mathbb{R} \times A.$$

Für welche $(t, a) \in \mathbb{R} \times A$ existiert

$$\frac{\partial X(t, a)}{\partial a}$$

und für welche $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{\partial X(t, 0)}{\partial a} = 0 \quad ?$$

Wenn Sie sich bzgl. der in Aufgabe 8.3 zu bestimmenden Menge A nicht sicher sind, nehmen Sie provisorisch $A = \mathbb{R}$ an.

WIR WÜNSCHEN IHNEN FROHE WEIHNACHTEN UND VIEL ERFOLG IM NEUEN JAHR!