Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Fin. Ökon. Thilo Moseler

12. Januar 2009

Analysis III
9. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 21. 1. 2009 bis 23. 1. 2009 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 19. 1. 2009 um 10.00 Uhr in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 9.1 Es sei Ω eine unendliche Menge. Zeigen Sie:

(i) $\{A \subset \Omega : A \text{ oder } \Omega \setminus A \text{ abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra.

(ii) $\{A \subset \Omega : A \text{ oder } \Omega \setminus A \text{ endlich}\}$ ist eine Algebra aber keine σ-Algebra.

(iii) Die von den Mengen $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, erzeugte σ-Algebra (d.h. die kleinste die einelementigen Mengen $\{\omega\}$ enthaltende σ-Algebra) stimmt mit der in (i) gegebenen überein.

Aufgabe 9.2
Das System aller endlichen Teilmengen einer Menge Ω ist ein Ring, jedoch nur für endliches Ω eine Algebra.

Aufgabe 9.3 Es sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum (d.h. Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über Ω). Es sei $(x_i)_i$ eine Folge von Punkten aus Ω und $(m_i)_i$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Für eine Menge A definiere

$$\mu(A) = \sum_{\{i \in \mathbb{N} \colon x_i \in A\}} m_i.$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist.

Aufgabe 9.4 Betrachten Sie den normierten Raum X, bestehend aus der Funktionenmenge $C([0,1], \mathbb{R})$ mit der Norm $||f|| := \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x$.
Sind die Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2} + n(x - \frac{1}{2}), & \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq x \leq 1, \end{cases} \\ g_n(x) &= x^n \end{aligned}$$

Cauchyfolgen in X? Haben sie einen Grenzwert in X?