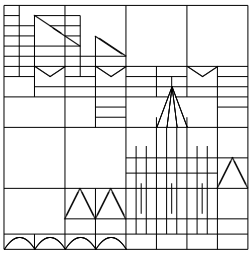
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Fin. Ökon. Thilo Moseler



26. Januar 2009

Analysis III
11. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 4. 2. 2009 bis 6. 2. 2009 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 2. 2. 2009 um 10.00 Uhr in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Dieses Übungsblatt dient der selbständigen Beschäftigung mit folgenden Sachverhalten.

(A) **Definition 2.1** Ein System $\mathfrak{D}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt *Dynkin-System* (in Ω), wenn es folgende Eingenschaften besitzt:
(i) $\Omega \in \mathfrak{D}$,
(ii) $D \in \mathfrak{D} \Longrightarrow D^c \in \mathfrak{D}$,
(iii) für jede Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise fremder Mengen aus $\mathfrak{D}$ liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ in $\mathfrak{D}$.

Lemma 2.2 Jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}$ ist stabil bezüglich der Bildung eigentlicher Komplemente, d.h. es besitzt die Eigenschaft $D, E \in \mathfrak{D}, D \subset E \Longrightarrow E \setminus D \in \mathfrak{D}$,

Satz 2.3 Ein Dynkin-System $\mathfrak{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn mit je zwei Mengen aus $\mathfrak{D}$ auch deren Durchschnitt zu $\mathfrak{D}$ gehört.

Satz 2.4 Für jedes Mengensystem $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$, welches mit je zwei Mengen deren Durchschnitt enthält, gilt: $\delta(\mathfrak{E}) = \sigma(\mathfrak{E})$, d.h. das kleinste $\mathfrak{E}$ enthaltende Dynkin-System $\delta(\mathfrak{E})$ stimmt mit der von $\mathfrak{E}$ erzeugten σ-Algebra überein.

(B) **Definition 5.2** *Äußeres Maß* auf einer Menge Ω heißt jede numerische Funktion μ^* auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit den Eigenschaften:
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(ii) $Q_1 \subset Q_2 \Longrightarrow \mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$,
(iii) $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} Q_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n)$ für jede Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$.
Eine Teilmenge A von Ω heißt μ^*-messbar, wenn sie die Eigenschaft

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^c) \text{ für jedes } Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$$

besitzt.

Definition Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in einer Menge Ω. Dann heißt die durch

$$\mu^*(Q) := \begin{cases} \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : (A_n) \in \mathfrak{U}(Q)\right\}, & \text{falls } \mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{falls } \mathfrak{U}(Q) = \emptyset \end{cases}$$

erklärte Funktion $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ das *zu μ gehörige äußere Maß*. Für jede Menge $Q \subset \Omega$ bezeichnet hierbei $\mathfrak{U}(Q)$ die Menge aller Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{R}$ welche Q überdecken, also $Q \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ erfüllen.

Satz 5.3 Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge Ω. Dann ist das System $\mathfrak{A}^*$ aller μ^*-messbaren Teilmengen $A \subset \Omega$ eine σ-Algebra in Ω. Ferner ist die Restriktion von μ^* auf $\mathfrak{A}^*$ ein Maß.

Satz 5.1 Jedes Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω kann auf mindestens eine Weise zu einem Maß $\widetilde{\mu}$ auf die von $\mathfrak{R}$ in Ω erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathfrak{R})$ fortgesetzt werden.

(C) **Satz 5.4** Sei $\mathfrak{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω, in welchem eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen existiert mit $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Dann sind zwei Maße μ_1 und μ_2 auf $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften (i) $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ für alle $E \in \mathfrak{E}$ und (ii) $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, einander gleich.

Definition 5.5 Ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω heißt *σ-endlich*, wenn eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{R}$ existiert mit $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ sowie mit $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 5.6 Jedes σ-endliche Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in einer Menge Ω kann auf genau eine Weise zu einem Maß $\widetilde{\mu}$ auf $\sigma(\mathfrak{R})$ fortgesetzt werden.

Lesen Sie deren Beweise nach und testen Sie Ihr Verständnis anhand der folgenden 3 Aufgaben.

Aufgabe 11.1

(i) Sei Ω eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl $2n$ von Elementen ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie: Das System $\mathfrak{D}$ aller Mengen $D \subset \Omega$ mit einer geraden Anzahl von Elementen ist ein Dynkin-System. Im Falle $n > 1$ ist $\mathfrak{D}$ keine Algebra und damit auch keine σ-Algebra.

(ii) Bestimmen Sie das von $\mathfrak{E}$ erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathfrak{E})$ für den Fall eines aus zwei Teilmengen A und B von Ω bestehenden Systems $\mathfrak{E}$. Man zeige, dass $\delta(\mathfrak{E})$ und $\sigma(\mathfrak{E})$ genau dann zusammenfallen, wenn eine der Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ oder $A^c \cap B^c$ leer ist.

Aufgabe 11.2 Zeigen Sie für eine beliebige nichtabzählbare Menge Ω:

(i) Durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ist auf der σ-Algebra $\mathfrak{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder} A^c \text{ abzählbar}\}$ (vgl. Aufgabe 9.1) ein Maß erklärt.

(ii) Das zu μ gehörige äußere Maß μ^* ordnet jeder Menge $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ den Wert 1 bzw. 0 zu, je nachdem ob A nicht abzählbar oder abzählbar ist.

(iii) Auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist μ^* kein Maß, nicht einmal ein Inhalt.

Aufgabe 11.3 Zeigen Sie, dass die in Definition 5.5 eines σ-endlichen Inhalts μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω auftretende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets als Folge paarweiser fremder Mengen aus $\mathfrak{R}$ gewählt werden kann, welche Ω überdeckt und die Endlichkeitsbedingung $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.