Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Fin. Ökon. Thilo Moseler

2. Februar 2009

Analysis III
12. Übungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind zum Vortragen in den Übungstunden vom 11. 2. 2009 bis 13. 2. 2009 vorzubereiten. Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und bis zum 9. 2. 2009 um 10.00 Uhr in die gekennzeichneten Briefkästen einzuwerfen.

Aufgabe 12.1 Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Messraum, und sei D eine in $\mathbb{R}$ dichte Menge reeller Zahlen (wie etwa $\mathbb{Q}$). Zeigen Sie, dass eine numerische Funktion f auf Ω genau dann $\mathfrak{A}$-messbar ist, wenn eine der Bedingungen

(i) $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$, (ii) $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{A}$,

(iii) $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{A}$, (iv) $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{A}$

nur für alle $\alpha \in D$ erfüllt ist.

Aufgabe 12.2 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathfrak{A}$-messbarer numerischer Funktionen auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Warum ist die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{R}$ konvergiert, $\mathfrak{A}$-meßbar?

Aufgabe 12.3 Zeigen Sie: Jede beschränkte, $\mathfrak{A}$-messbare, reelle Funktion $f \geq 0$ auf einem Messraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist der gleichmäßige Limes einer isotonen Folge von $\mathfrak{A}$-Elementarfunktionen.

Aufgabe 12.4 Geben Sie eine Folge $u_n \in E(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ und eine Funktion $f \in E^*(\mathbb{R}, \mathfrak{B}^1)$ an, so dass gilt

(a) $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$

(b) $J := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\mathrm{d}x$ existiert,

(c) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x \neq J.$