Zusatzblatt 3

1 Masse und Algebren

Unser erstes Ziel ist es, eine vernünftige Möglichkeit zu entwickeln, beliebige Mengen zu „messen", ihnen also eine Zahl zuzuordnen, die etwas über ihre „Größe" aussagt. Betrachten wir etwa eine endliche Menge $M = \{x_1, ..., x_n\}$, so können wir beispielsweise eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(M) \to \mathbb{N}$ definieren, die jeder Teilmenge $N \subseteq M$ die Anzahl ihrer Elemente $\mu(N) := \#N$ zuordnet.

Es wird sich bei unendlichen Mengen wie $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ als schwierig bis unmöglich erweisen, einen kanonischen Maßbegriff zu definieren, der *jede* Teilmenge erfasst. Daher kümmern wir uns zunächst zum einen passenden Definitionsbereich einer solchen Maßfunktion. Sei eine Menge M gegeben. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ der Potenzmenge von M heißt ein *Ring*, falls $\emptyset \in \mathcal{A}$ und für $A, B \in \mathcal{A}$ stets auch $A \cup B$ und $A \backslash B$ in $\mathcal{A}$ liegen. Gilt zusätzlich $M \in \mathcal{A}$, so heißt $\mathcal{A}$ eine *Algebra*.

Beispielsweise ist die Menge $\mathbb{A}_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ aller endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter, halboffener Intervalle $(a, b] := (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]$ des $\mathbb{R}^n$ ein Ring. Auf $\mathbb{A}_n$ definieren wir eine (wohldefinierte) Funktion λ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \forall I = (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n] \in \mathbb{A}_n \quad &: \quad \lambda(I) := (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n) \\ \forall J = (a^{(1)}, b^{(1)}] \cup ... \cup (a^{(k)}, b^{(k)}] \in \mathbb{A}_n \quad &: \quad \lambda(J) := \lambda((a^{(1)}, b^{(1)}]) + ... + \lambda(a^{(k)}, b^{(k)}]. \end{aligned}$$

Allgemein heißt eine Funktion $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein *Inhalt*, falls $\lambda(\emptyset) = 0$ und $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(b)$ für $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt *σ-Algebra*, falls für alle Folgen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. Ein Inhalt $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt ein *Maß* auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, falls für alle disjunkten Folgen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auf $\mathcal{A}$ gilt $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$ *(σ-Additivität)*.

Nach all diesen Begriffseinführungen kommen wir nun zum Wesentlichen: Der Definition eines Maßes auf der kleinsten σ-Algebra $\sigma(\mathbb{A}_n)$, die alle Mengen aus $\mathbb{A}_n$ enthält. Bezeichne $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ das System aller in der euklidischen Topologie offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, dann ist $\sigma(\mathbb{A}_n) = \sigma(\tau)$, d.h. die Maßfunktion, die wir suchen, erlaubt es uns, jede offene Menge zu bewerten. $\sigma(\tau)$ heißt die Borel-*σ-Algebra* des $\mathbb{R}^n$.

Um nun $\lambda : \mathbb{A}_n \to [0, \infty]$ zu einem Maß auf $\sigma(\mathbb{A}_n)$ fortzusetzen, benötigen wir den Satz von Caratheodory: *Jeder σ-additive Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A}$ lässt sich eindeutig zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortsetzen.*

Die eindeutige Fortsetzung von λ wird als das Lebesgue-*Maß* des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

2 Integrale

Seien $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ zwei σ-Algebren, dann heißt eine Funktion $f : X \to Y$ *messbar*, falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Insbesondere sind stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar bzgl. der Borel-σ-Algebra, da Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen wieder offen sind und damit in $\mathcal{B}(\tau)$ liegen.

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine *σ-Algebra* mit $A \in \mathcal{A}$. Dann heißt $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{1}_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\mathbb{1}_A(x) = 0$ für $x \notin A$ die *charakteristische Funktion* von A. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ existieren mit $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}$.

Man kann zeigen, dass zu jeder messbaren Funktion f eine Folge von Treppenfunktionen existiert, die punktweise gegen f konvergiert. Ist $f \geq 0$, dann kann die Folge monoton wachsend gewählt werden; bei beschränktem f sogar gleichmäßig konvergent.

Was der ganze Zirkus soll, wird bei der Definition des Lebesgue-*Integrals* klar: Sei μ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Für Treppenfunktionen s definieren wir kanonisch

$$\int s \ \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(A_k) \qquad \left(s = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k} \right).$$

Ist $f \geq 0$ messbar, so setzen wir

$$\int f \ \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int s \ \mathrm{d}\mu \ \middle| \ s \text{ Treppenfunktion mit } 0 \leq s \leq f \right\}$$

und schließlich allgemein für messbares f

$$\int f \ \mathrm{d}\mu := \int \max\{f, 0\} \ \mathrm{d}\mu - \int -\min\{f, 0\} \ \mathrm{d}\mu \qquad \text{(falls nicht beide unendlich).}$$

3 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Bezeichne $\mathfrak{L}^1$ die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Seien $f, g \in \mathfrak{L}^1$. Dann gelten:

(1) $\int$ ist *linear* und *monoton*, d.h. $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$ und $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.

(2) Ist $\mu(A) = 0$, dann $\int(f \cdot \mathbb{1}_A) = 0$.

(3) Ist $h : X \to [0, \infty]$ messbar mit $h \leq f$, dann ist $h \in \mathfrak{L}^1$ *(Majorantenkriterium)*.

(4) Ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disjunkt, dann $\int(f \cdot \mathbb{1}_A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int(f \cdot \mathbb{1}_{A_n})$.

(5) Ist h messbar mit $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\}) = 0$, dann ist $h \in \mathfrak{L}^1$ mit $\int f = \int h$.

(6) Ist $f \geq 0$ mit $\int f = 0$, dann ist $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) = 0$.

(7) $|f| \in \mathfrak{L}^1$ und $|\int f| \leq \int |f|$.

4 Konvergenzsätze

(1) Seien $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ messbar und konvergent, dann ist $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ *(monotone Konvergenz)*.

(2) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ messbar, $f_n \geq 0$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(3) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ messbar, $f_n \geq 0$. Dann ist $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$ (Fatou).

(4) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ messbar mit $|f_n| \leq g$, dann ist $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ *(majorisierte Konvergenz)*.

Mit der majorisierten Konvergenz lässt sich zeigen, dass jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist mit gleichem Integralwert. *Das* Lebesgue-*Maß ist also eine Verallgemeinerung des* Jordan-*Maßes.*

5 Integralsätze

Kommen wir zur Anwendung der Resultate: Unter geeigneten Voraussetzungen besagt der *Satz über parameterabhängige Integrale*, dass

$$\lim_{y \to a} \int f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int \lim_{y \to a} \int f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x);$$

insbesondere vertauschen dann Ableitung und Integral:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \int f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int \frac{\partial}{\partial y_i} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Bei der Theorie der Fourier-Transformation kommen wir in den Genuss dieser Eigenschaft: Dort übersetzen sich mit Hilfe dieses Satzes Ableitungen in Multiplikationen, wodurch wir eine Möglichkeit gewinnen, partielle Differenzialgleichungen ohne Aufwand zu lösen.

Der *Satz von* Fubini erlaubt uns wie beim Riemann-Integral iterative Integration und Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$\int f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_2(x, y) = \int \left(\int f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_1(x) \right) \, \mathrm{d}\mu_1(y) = \int \left(\int f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_1(y) \right) \, \mathrm{d}\mu_1(x).$$

Insbesondere erhalten wir das *Prinzip von* Cavalieri: Sei $A \in \mathcal{B}(\mu_n)$, dann liegen alle $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächen $A_t := \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\}$ in $\mathcal{B}(\mu_{n-1})$ und

$$\mu_n(A) = \int \mu_{n-1}(A_t) \, \mathrm{d}\mu_1(t).$$

Schließlich erhalten wir eine Verallgemeinerung des *Transformationssatzes*: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \to V$ ein $\mathfrak{C}^1$-Diffeomorphismus, dann ist $\mu \circ \Phi = |\det \Phi'| \cdot \mu$ ein Maß und $f \in \mathfrak{L}^1(\mu \circ \Phi)$ genau dann, wenn $f \circ \Phi |\det \Phi'| \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ mit

$$\int (f \cdot \mathbb{1}_{\Phi(U)}) \, \mathrm{d}\mu = \int ((f \circ \Phi |\det \Phi'|) \cdot \mathbb{1}_U) \, \mathrm{d}\mu.$$

6 Hilbert-Räume

Ein HILBERT-*Raum* ist ein Paar $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, bestehend aus einem Vektorraum $\mathcal{H}$ und einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, so dass $\mathcal{H}$ bzgl. der Norm $||x||_{\mathcal{H}} := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $(x \in \mathcal{H})$ vollständig ist (in dem Sinne, dass alle CAUCHY-Folgen aus $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$ konvergieren).

Ein zentraler Satz der HILBERT-Raumtheorie ist der *Satz vom Minimalabstand*: *Zu jedem $x \in \mathcal{H}$ und jedem konvexen, abgeschlossenen $K \subseteq \mathcal{H}$ gibt es genau ein $y \in \mathcal{H}$, das x bzgl. $||\cdot||_{\mathcal{H}}$ am nächsten liegt.*

Speziell gilt dies für Untervektorräume $K \subseteq \mathcal{H}$, da diese offensichtlich konvex und abgeschlossen sind. Wir erhalten so den *Satz von der Orthogonalprojektion*: *Seien $K \subseteq \mathcal{H}$ ein Teilraum von $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H}$, dann ist $y \in \mathcal{H}$ Minimalelement zu $x \Leftrightarrow (y - x) \perp K$*, d.h. wenn jedes Element aus K bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ orthogonal zu $(x - y)$ ist.

Mit diesen beiden Resultaten lässt sich der *Satz von der Orthogonalzerlegung* beweisen: *Ist $K \subseteq \mathcal{H}$ ein Teilraum, dann auch $K^\perp := \{x \in \mathcal{H} \mid \forall y \in K : \langle x, y\rangle = 0\}$ und es gilt $\mathcal{H} = K \oplus K^\perp$.*

In HILBERT-Räumen gilt der RIESZ*sche Darstellungssatz*: Sei $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, dann existiert genau ein $y \in \mathcal{H}$ mit $\varphi = \langle y, \cdot\rangle$, d.h. $\forall x \in \mathcal{H} : \varphi(x) = \langle y, x\rangle$.

Wir wenden uns nun einem ganz speziellen HILBERT-Raum zu. Bezeichne $\mathscr{L}^p$ die Menge aller messbaren $f : X \to \mathbb{R}$ mit $\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

Auf $\mathscr{L}^p$ definiert die Abbildung $||\cdot||_p := (\int |\cdot|^p)^{\frac{1}{p}} : \mathscr{L}^p \to \mathbb{R}$ keine Norm, daher führen wir auf $\mathscr{L}^p$ eine Äquivalenzrelation ein: $f \sim g :\Leftrightarrow \mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Der Raum $\mathcal{L}^p$ der Äquivalenzklassen $[\cdot]_\sim$ von $\sim$ ist dann ein BANACH-Raum bzgl. der p-Norm (auf $\mathscr{L}^p$ fehlt uns die Definitheit von $||\cdot||_p$!).

Speziell im Fall $p = 2$ ist $\mathcal{L}^p$ ein HILBERT-Raum mit kanonischem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int (f \cdot g) \, \mathrm{d}\mu$ (wobei wir bei der Notation zwischen f und $[f]_\sim$ nicht mehr unterscheiden, da wir ohnehin auf $\mathcal{L}^p$ vertreterweise rechnen: $[f]_\sim + [g]_\sim := [f + g]_\sim$ und $\alpha[f]_\sim := [\alpha f]_\sim$ für $f, g \in \mathcal{L}^p$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

7 Bestapproximation in Hilbert-Räumen

Seien $X := (-\pi, \pi)$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann bildet die Menge Π_n aller Polynome von Grad $\leq n$ einen $(n+1)$-dimensionalen Teilraum des (unendlich dimensionalen) HILBERT-Raumes $\mathcal{H} := \mathcal{L}^2$. Unser Ziel ist es, eine Funktion f aus $\mathcal{H}$ möglichst gut durch ein Polynom aus Π_n zu approximieren; im Idealfall erhalten wir so eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen $p_n \in \Pi_n$ mit $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$.

Es ist klar, dass unsere *Bestapproximation* p_n aus Π_n zu $f \in \mathcal{H}$ das Minimalelement ist: Nach dem Satz von der Orthogonalzerlegung ist $\mathcal{H} = \Pi_n \oplus \Pi_n^\perp$, d.h. f hat eine eindeutige Darstellung $f = p_n + p_n^\perp$ mit $p_n \in \Pi_n$ und $p_n^\perp \in \Pi_n^\perp$ und p_n hat nach dem Satz von der Orthogonalprojektion minimalen Abstand zu f.

Um p_n explizit zu bestimmen, brauchen wir zunächst eine Basis von Π_n, etwa $v_k := x^k$ $(k = 0, ..., n)$. Dann gibt es eindeutige $\lambda_0, ..., \lambda_n$ mit $p_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$ und die λ_k sind eindeutige Lösung des Problems

$$A\lambda = b, \qquad A := (\langle x^i, x^j\rangle)_{0 \leq i \leq n}^{0 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}, \qquad b := \langle x, f\rangle \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

8 Fourier-Reihen

Wir veranstalten den ganzen Spaß der Bestapproximation noch einmal, nur wählen wir diesmal nicht den Raum Π_n von Polynomen, sondern den Raum T_n der *trigonometrischen Funktionen* $\sum_{k=-n}^n \alpha_k e_k$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $e_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$.

Die $e_{-n}, ..., e_n$ bilden dann nicht nur eine Basis von T_n, sondern auch ein *Orthonormalsystem*, d.h. es gilt $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ und $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ für alle $i = -n, ..., n$. Die Bestapproximation $\tilde{f}$ eines $f \in \mathcal{H}$ lässt sich daher darstellen als

$$\tilde{f} = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f\rangle e_k \qquad (\langle e_k, f\rangle \text{ der } k\text{-te FOURIER-Koeffizient zu } f).$$

Mit Hilfe der EULERschen Formel $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ können wir auch schreiben

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kt) \qquad (a_k, b_k \in \mathbb{R}).$$

Betrachtet man wieder die Folge der Bestapproximationen $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{f}_n \in T_n$, so lässt sich zeigen, dass stets $\tilde{f} := \lim \tilde{f}_n = f$. Wir nennen $\tilde{f}$ die FOURIER-*Reihe* zu f. Dies erinnert stark an die TAYLOR-Reihen aus der Analysis I, die Theorie der FOURIER-Reihen hat aber zwei entscheidende Vorteile: Die darzustellenden Funktionen müssen hier nur messbar, nicht unendlich oft differenzierbar sein und die FOURIER-Reihe eines messbaren f konvergiert immer, und zwar immer gegen f (das war bei den TAYLOR-Reihen nicht so!).

Wir haben also eine Möglichkeit gewonnen, die große Klasse der messbaren Funktionen in Reihen trigonometrischer Funktionen zu entwickeln. Eine technische Anwendung der Theorie von FOURIER-Reihen und FOURIER-Transformation (entwickelt von FOURIER 1822 in Zusammenhang mit Wärmeleitung) ist beispielsweise die Audiokompression (→ MP3, SEITZER-BRANDENBURG, seit 1960).

9 Die Fourier-Transformation

Eine kontinuierliche Variante der FOURIER-Reihen ist die FOURIER-Transformation – grob gesagt: Der Übergang der diskreten Summe zur kontinuierlichen Summe, sprich zum Intgegral.

Mit

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad \rightsquigarrow \quad e_\xi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi x};$$

$$f_k := \langle e_k, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \quad \rightsquigarrow \quad \widehat{f}(\xi) := \langle e_\xi, f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ix\xi}\, \mathrm{d}x$$

lässt sich f schreiben als

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\xi) e_\xi(x)\, \mathrm{d}\xi.$$

$\mathcal{F}(f) := \widehat{f}$ heißt die FOURIER-*Transformierte* von f und $\mathcal{F}$ die FOURIER-*Transformation*.

Analog definieren wir für integrierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int f(\xi) e^{-ikx}\, \mathrm{d}\xi.$$

Wie schon erwähnt, verwandeln sich Ableitungen von f durch FOURIER-Transformation in Multiplikationen:

$$\mathcal{F}(\partial_k f)(x) = -ix_k \mathcal{F}(f)(x).$$

10 Anwendung: Die Wärmeleitungsgleichung

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Die *Wärmeleitungsgleichung* ist eine Anfangsrandwertaufgabe der Form

$$\begin{cases} u_t(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0 & \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times G \\ u(t,x) = 0 & \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial G \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{für } x \in G \end{cases} . \tag{WLG}$$

Sei u eine glatte Lösung zu (WLG), dann gilt wegen

$$\partial_j e^{-ix\xi} = -i\xi_j e^{-ix\xi} \rightsquigarrow \partial_j^2 e^{-ix\xi} = -\xi_j^2 e^{-ix\xi} \rightsquigarrow \Delta e^{-ix\xi} = -|\xi|^2 e^{-ix\xi}$$

für die FOURIER-Transformierte $\widehat{u}$ von u, dass

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(t,\xi) &= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(t,x)\, \mathrm{d}x &&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u_t(t,x)\, \mathrm{d}x &&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \Delta u(t,x)\, \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \Delta(e^{-ix\xi}) u(t,x)\, \mathrm{d}x &&= \tfrac{-|\xi|^2}{\sqrt{2\pi}^n} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(t,x)\, \mathrm{d}x &&= -|\xi|^2 \widehat{u}(t,\xi), \end{aligned}$$

d.h. $\widehat{u}(t,\xi)$ erfüllt zu festem ξ eine gewöhnliche Differenzialgleichung in t.

Zusammen mit der Anfangsbedingung $\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)$ ergibt sich als Lösung

$$\widehat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi)$$

und wir erhalten durch Rücktransformation unser u:

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(t,\cdot))(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{+ix\xi} \widehat{u}(t,\xi)\, \mathrm{d}\xi$$